الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2012

الشعبة : علوم تجريبية

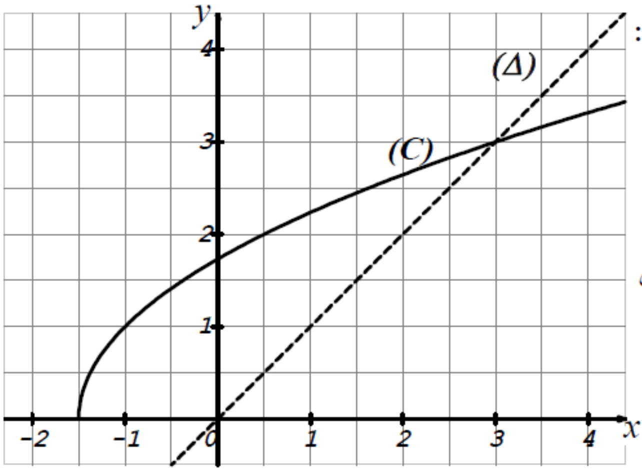
اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرّفة بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.



1) لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ ، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

أ) – أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) – ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر $\left(u_n\right)$ و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

3) أ) – ادرس اتجاه تغيّر المتتالية $\left(u_n\right)$.

ب) – استنتج أنّ المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z\neq 2-3i$).

– حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

– تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_C=-2i$، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة: $14x+16y+13z-47=0$ ، و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-1;3;1)$.

1) أ – تحقق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب – بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P).

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3) أ – اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب – تحقق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

جـ – احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3{,}5<\alpha<-3{,}4$ و $-1{,}1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^{\ 2}+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدّها الأول.

ب) اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

اكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) بيّن أنّ النقط A، B و C تُعيّن مستويا.

2) بيّن أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث: $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$.

أ- تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب- بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

جـ- استنتج أنّ المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ- تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ-اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب-اكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ-استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g\left(x\right)=1-x\,e^{x}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلاً وحيدا α على المجال $\left]-1;+\infty\right[$.

ب- تحقق أنّ $0,5<\alpha<0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left]-\infty;2\right]$ كما يلي: $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{x}-x-1$.

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\infty;2\right]$ فإن: $f'(x)=-g\left(x\right)$.

استنتج إشارة $f'\left(x\right)$ على المجال $\left]-\infty;2\right]$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f\left(\alpha\right)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$. (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

4) أ- بيّن أنّ المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$.

5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب- أنشئ $\left(\Delta\right)$ و $\left(C_f\right)$.

6) لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h\left(x\right)=\left(ax+b\right)e^{x}$.

أ-عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\,e^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب-استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

	الموضوع الأوّل	مجزأة	المجموع
	التمرين الأوّل: (05 نقاط)		
المتتاليات العددية	1)أ) نقل الشكل و إنشاء u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها).	01	05
	ب) حسب الشكل نخمن أنّ (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3.	$2\times0,25$	
	2) البرهان بالتراجع أنّ : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $0<u_n<3$.	01	
	3) أ) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n): من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$	01	
	ب) بما أنّ (u_n)متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ نجد $-l^2+2l+3=0$ مع $l>0$ و منه $l_1=3$ مقبول و $l_2=-1$ مرفوض إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.	0,5 1	
	التمرين الثاني: (04 نقاط)		
الأعداد المركبة	1) $z\neq2-3i$، $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-(2-3i)}$ تعني $z^2-2z+6=0$ $\Delta=\left(2i\sqrt{5}\right)^2$ ، $z_1=1-i\sqrt{5}=z_B$ و $z_2=1+i\sqrt{5}=z_A$.	0,25 3x0,25	04
	2) $\|z_A\|=\|z_B\|=\sqrt{6}$ إذن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.	$2\times0,5$	
	3) أ) $OM'=\|z'\|=3\times\dfrac{CM}{DM}$	01	
	ب) $CM=DM$ أي $OM'=3$ M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها3، $OE=3$.	0,5 2x0,25	
	التمرين الثالث: (04 نقاط)		
الهندسة في الفضاء	1)أ) $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;5;-4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}$و $\overrightarrow{AC}$غير مرتبطين خطيا.	$0,75$	04
	ب) $A,B,C\in(P)$ إذن $(P)=(ABC)$ (أو طريقة أخرى)	$0,75$	
	2) تمثيل وسيطي للمستقيم (AB): $\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-2+4\lambda\\z=5-6\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$	0,5	
	3) أ) $(Q):2x+8y-12z+21=0$ (أي طريقة تقبل).	01	
	ب) $D\in(Q)$	$0,25$	
	جـ) $d(D;(AB))=\dfrac{\sqrt{213}}{4}$	$0,75$	

المحور	عناصر الإجابة	مجزأة	المجموع
	التمرين الرابع: (07 نقاط)		
الدوال العددية حساب المساحات	1) أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ ، $x=0$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).	$2\times 0,25$	07
	ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$0,25$	
	2) $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$. إشارة $f'(x)$: $-\infty$ $+$ -2 $-$ 0 $+\infty$	$0,5$ $0,5$	
	جدول تغيرات الدالة f: $f(-2)=3+6\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ $f(-2)\approx 0,56$ x: $-\infty$ -2 0 $f'(x)$: $+$ 0 $-$ $f(x)$: $-\infty$ ↗ $f(-2)$ ↘ $-\infty$	$0,5$	
	3) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+5)-0$.	$0,5$	
	ب) $f(x)-(x+5)-6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ، $f(x)-(x+5)<0$ إذن (C_f) يقع تحت (Δ)	$0,5$	
	4) ♦ تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-3,5;-3,4]$. ♦ تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-1,1;-1]$.	$2\times 0,5$	
	5) إنشاء (C_f) و المستقيم (Δ).	$0,75$	
	6) أ- معادلة المستقيم (AB): $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$	$0,5$	
	ب- $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$. حل المعادلة يكافئ حل $x_0^2-x_0-12=0$ مع $x_0<0$ $x_0=-3$ و $y_0=2+6\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.	01	
	7) من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ، $g'(x)-f(x)$.	$0,5$	
	الموضوع الثاني		
	التمرين الأول: (04,5 نقط) 1) البرهان بالتراجع أنّ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $3<u_n<4$	0,75	04,5
	2) إثبات أنّ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$ .... استنتاج أنّ (u_n) متزايدة تماما 3) (u_n) محدودة من الأعل و متزايدة.	0,5 0,5 0,25	

	أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0=\ln\frac{1}{4}$	0,75	
	ب) $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\ln\frac{1}{4}$ و $u_n=3+e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\ln\frac{1}{4}}$	0,5+0,25	
	$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$	0,25	
	جـ) $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}$		
	$P_n=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$ و منه $P_n=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$ $\lim P_n=\frac{1}{16}$	0,25+0,5	
	التمرين الثاني: (04 نقاط)		
الهندسة في الفضاء	1) $\overrightarrow{AB}(3;1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-1;-1)$ ؛ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و منه A ، B ، C تعيّن مستويا.	$0,75$	**04**
	2) إثبات أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة لـــ (ABC)	01	
	3) أ- $D\notin(ABC)$	$0,25$	
	ب- $\overrightarrow{DH}\left(\frac{-17}{15};\frac{17}{30};\frac{-17}{6}\right)$؛ ($\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC}=0$ و $H\in(ABC)$) أو ($\overrightarrow{DH}=k.\vec{n}$ و $H\in(ABC)$).	01	
	جـــ- استنتاج أنّ (ADH) و (ABC) متعامدان. $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};\frac{-13}{30};\frac{-5}{6}\right)$ $(AH):\begin{cases}x=\frac{28}{15}t-1\\ y=\frac{-13}{30}t\\ z=\frac{-5}{6}t+1\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$	$2\times0,5$	
	التمرين الثالث: (04,5 نقطة)		
الأعداد المركبة	1) أ- $P(6)=0$	$0,5$	
	ب- $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$.	$0,5$	
	جـ- $P(z)=0$ معناه $z=6$ أو $z=3-i\sqrt{3}$ أو $z=3+i\sqrt{3}$.	$0,75$	
	2)أ) $z_A=6=6e^{i0}$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$0,75$	**$04,5$**
	ب) $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$	$+0,25$ $0,25$	
	جـ) $z_A-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A-z_C)$ إذن C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ (أو طريقة أخرى) . إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.	$0,5$	

	3) أ– العبارة المركبة للتشابه S: $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$	$0,5$	
	ب– $z_{A'} = 2i\sqrt{3}$.	$0,25$	
	جـ– $z_A - z_{A'} = -2(z_A - z_B)$، إذن A ، B ، A' في استقامية.	$0,25$	
	التمرين الرابع: (07 نقطة)		
الدوال العددية حساب المساحات	I) 1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$2\times 0,25$	07
	2) $g'(x) = -(1+x)e^x$ ، إشارتها هي إشارة $-(1+x)$ لأنّ $e^x > 0$ ♦ جدول تغيّرات الدالة g	$0,75$	
	3) أ– إثبات أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-1;+\infty[$.	$0,25$	
	ب– التحقق أنّ $0,5 < \alpha < 0,6$. إشارة $g(x)$ $-\infty \quad + \quad \alpha \quad - \quad +\infty$	$0,5$	
	II) 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$0,25$	
	2) من أجل كل x من $]-\infty;2]$ ، $f'(x) = -g(x)$. ♦ إشارة $f'(x)$: $-\infty \quad - \quad \alpha \quad + \quad 2 \quad +\infty$ ♦ جدول التغيّرات.	$0,25$ $0,25$ $0,5$	
	3) تبيان أنّ $f(\alpha) = \dfrac{-1-\alpha^2}{\alpha}$. ♦ $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$.	$0,5$ $0,5$	
	4) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x-1) = 0$ ب) $f(x) - (-x-1) = (x-1)e^x$ إشارتها $-\infty \quad - \quad 1 \quad + \quad 2 \quad +\infty$ الوضع النسبي	$0,25$ + $0,25$ + $0,25$	
	5) أ) مبرهنة القيم المتوسطة ب) رسم (Δ)،(C_f).	2x0,25 0,75	
	6) أ) $a = 1,\ b = -1$	$0,5$	
	ب) $G(x) = x - (x-1)e^x$	$0,25$	