**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة :** التحليل  **مذكرة رقم :** 01 **المحور :** الدوال العددية **الـمدة :**  05 سـا

 **الموضوع :**  **الـنـهـايـات**

**الكفاءة المستهدفة :**

* حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
* حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
* دراسة السلوك التقاربي لدالة

. **نهاية منتهية عند أو**

 **تعريف:**  دالة معرفة على مجال من الشكل و عدد حقيقي.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي.

 نكتب

**تطبيق :**  دالة معرفة على المجال $\left]2;+\infty \right[$ بـ : $f\left(x\right)= \frac{x}{x-2}$

أثبت أن : $\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=1$

**نتيجة:** إذا كانت نقول أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب للمنحنيالممثل للدالة عند.

 **نهاية غيرمنتهية عند أو**

 **تعريف1:**  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل ($AϵR$) يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب

**تعريف2:**  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل($ BϵR$) يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب

**تطبيق**

**نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي**

**. نهاية منتهية عند عدد حقيقي**

 تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل و عدد حقيقي.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل قر بالقدر الكافي من. نكتب

تطبيق :  دالة معرفة على المجال $R$ بـ : $f\left(x\right)= 2x+3$

1. ضع تخمين لسلوك $f\left(x\right)$ لما $x$ يؤول الى 2
2. في أي مجال يجب اختيار $x$ بحيث ينتمي $f\left(x\right)$ الى $\left]6.99;7.01\right[$

2. نهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي

 تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل($ AϵR$) يشمل كل القيم من أجل قريب بالقدر الكافي من. نكتب

تطبيق :  دالة معرفة على المجال $\left]0;+\infty \right[$ بـ : $f\left(x\right)= \frac{2}{(x-1)²}$

أثبت أن : $\lim\_{x\to 1}f\left(x\right)=-\infty $

تعريف: ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم الذي معادلته: . القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني يعني أن نهاية الدالة عند ( من اليسار أو من اليمين )

. المستقيم المقارب المائل

 تعريف: ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم ذو المعادلة: القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني عند  ( على الترتيب عند  ) يعني أن:  ( على الترتيب  )

 ملاحظة: إذا كانت الدالة معرفة كما يلي: مع أو فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة عند أو 

تطبيق :

 *f*  هي الدالة العددية المعرفة بـ: 

1) عين مجموعة تعريف الدالة *f* ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة *f*

المنحنيات المتقاربة :

 $ C\_{g} و C\_{f}$ منحني الدالتين $f$ و$ g$ على الترتيب . نقول ان $ C\_{g} و C\_{f}$ متقاربين عند $+\infty $ و$-\infty $

اذاكانت $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)-g(x)=0$

تتمات على النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

  

2. العمليات على النهايات

  و  دالتان.  يمثل عدد حقيقي أو  أو . نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

* نهاية مجموع دالتين:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | ح ع ت |  |  |  |  |  |

* نهاية جداء دالتين:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ح ع ت | ح ع ت |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* نهاية حاصل قسمة دالتين:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| حعت | حعت | حعت | حعت | حعت |  |  |  |  |  |  |  |  |

 ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين "( ح ع ت )

تطبيق : في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة *f* ،

 عند،عند  ،  عند، عند ،عند 1-

 عند،عند ، عند 2 ،  عند،عند ،عند 3

 عند، عند ، عند 1- ، عند3

نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

 مبرهنة: ، و تمثل أعددا حقيقية أو أو . ، و دوال حيث.
 إذا كانت  و إذا كانت  فإن 

تطبيق : باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1)  ، 2) 

3)  ، 4) 

2 . النهايات بالمقارنة

 مبرهنة1: ، و دوال و  عدد حقيقي. إذا كانت و و إذا كان من

 أجل كبير بالقدر الكافي  فإن .

 مبرهنة2: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر

 الكافي  فإن .

 مبرهنة3: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر

 الكافي  فإن .

 تطبيق :

أحسب : $\lim\_{x\to +\infty }\frac{\sin(x)}{x}$ ، $\lim\_{x\to +\infty }\frac{\cos(x)}{x+1}$

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة : التحليل مذكرة رقم : 01 المحور : الدوال العددية الـمدة : 05 سـا**

 **الموضوع : الاسـتـمـراريـة**

**الكفاءة المستهدفة :**

**نشاط 03 ، 04 صفحة 87 :**

**1. تعريف الاستمرارية**

 **تعريف:**

 ** دالة مجموعة تعريفها و عدد حقيقي غير معزول من.
  مستمرة عند يعني أن نهاية الدالة عند  هي .**

** معناه  مستمرة عند **

**الاستمرارية نحو دالة على مجال**

**القول أن الدالة مستمرة على مجال يعني أن مستمرة عند كل عدد حقيقي من.**

 **التفسير البياني: تكون الدالة مستمرة على مجال عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم ( اليد ).**

**. خواص**

 **كل الدوال و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال كثيرات الحدود،** **و** **مستمرة على**$R$**.**  **الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**

**تطبيق01 : لتكن الدالة  *f* المعرفة**$R$ **على كما يلي:**

****

**1) ادرس استمرارية الدالة *f* عند 2 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على** $R$ **؟ لماذا؟**

**تطبيق02 : *f*  دالة عددية معرفة كما يلي:**

 ** إذا كان  و **

**1) ادرس استمرارية *f* عند 1 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على**$R$ **؟**

**. مبرهنة القيم المتوسطة**

 **مبرهنة:  دالة معرفة و مستمرة على مجال.
 من أجل كل عدد حقيقي محصور بين  و، يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و**

 **بحيث .**

 **حالة خاصة:**

* **إذا كانت دالة مستمرة على مجال و كان ( العدد محصور بين  و )**

 **فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و بحيث **

* **إذا كانت  دالة معرفة و مستمرة على مجال فإنه من أجل كل عدد حقيقي محصور بين و، المعادلة تقبل على الأقل حلا محصورا بين و.**

 **ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة أما تعيين الحلول أو قيم**

**مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.**

**تطبيق 01 :**

**برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة  تقبل على الأقل حلا في المجال**

**تطبيق02 :**

**لتكن الدالة  *f* المعرفة على  بـ:**

 ****

**1) بين أن الدالة *f* متناقصة تماما على المجال**

**2) لتكن الدالة *g* المعرفة علىبـ:**

** بين أن الدالة *g* متناقصة تماما على.**

** احسب و ثم استنتج أن المعادلة  تقبل حلا وحيدا في المجال**