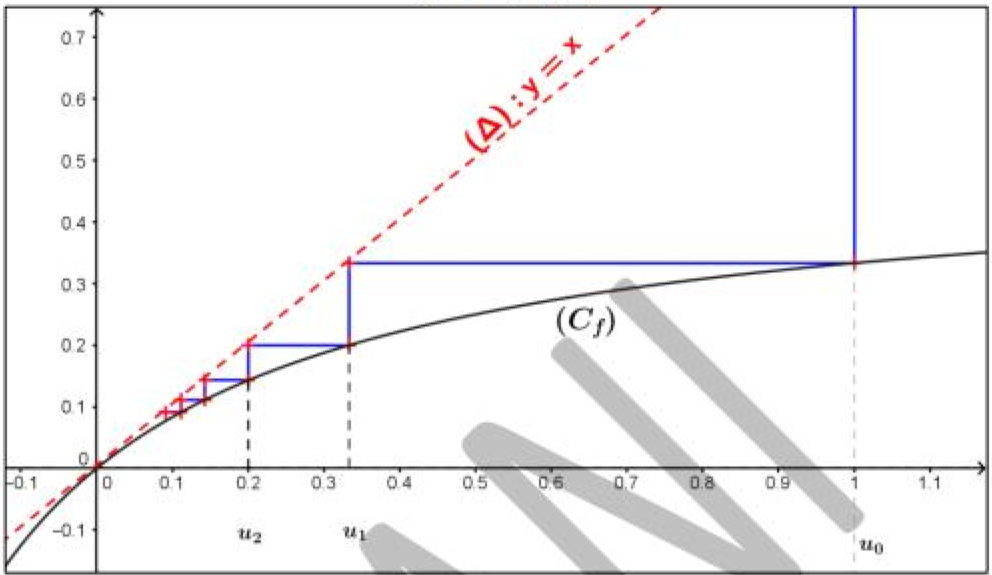
التمرين الأول : 6 نقاط

أ) تمثيل على محور الفواصل ، u_0، u_1 و u_2:



ب) تخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نلاحظ أن $u_0 > u_1 > u_2$ و عليه التخمين يكون أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وأن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) أ) حساب القيم v_0، v_1 و v_2:

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$ ، $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{2u_0+1}{u_0} = \frac{2+1}{1} = 3$ ، $v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{2u_1+1}{u_1} = \frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5$

ب) برهان أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2:

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n} = 2 + v_n$

إذن (v_n) متتالية حسابية أســــــاسها $r = 2$ و حدها الأول $v_0 = 1$

ج) عبارة الحد العام v_n: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = v_0 + nr$ ومنه : $\boxed{v_n = 1+2n}$

إستنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا ، $v_n = \frac{1}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n}$ و عليه نجد : $\boxed{u_n = \frac{1}{2n+1}}$

د) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$ و عليه المتتالية (v_n) متباعدة

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ و عليه المتتالية (u_n) متقاربة .

3) حساب المجموعين :

$$S_1 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2$$

$$S_2 = u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_{2016}v_{2016} = \left(u_0 \times \frac{1}{u_0}\right) + \left(u_1 \times \frac{1}{u_1}\right) + \dots + \left(u_{2016} \times \frac{1}{u_{2016}}\right) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{2017} = 2017$$

التمرين الثاني :

الجزء1: تعيين العددين الحقيقيين b و c:

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $g'(x)=1-\frac{c}{(x+1)^2}$

(C_g) منحنى الدالة g يقبل عند النقطة $A(0;3)$ مماسا معامل توجيهه -3 ، معناه $\begin{cases} g'(0)=-3 \\ g(0)=3 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 1-c=-3 \\ b+c=3 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} c=4 \\ b=-1 \end{cases}$. ومنه: $g(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$

الجزء 2: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

1) التحقق أنه من اجل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$، $f(x)=g(x)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $g(x)=x-1+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+4}{x+1}=\frac{x^2-1+4}{x+1}=\frac{x^2+3}{x+1}=f(x)$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x\overset{>}{\to}-1} x^2+3=4 \\ \lim_{x\overset{>}{\to}-1} x+1=0^+ \end{cases}$

$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x\overset{<}{\to}-1} x^2+3=4 \\ \lim_{x\overset{<}{\to}-1} x+1=0^- \end{cases}$

3) حساب $f'(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

4) تعيين إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول التغيرات:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشـــــارة $(x-1)(x+3)$ لأن $(x+1)^2>0$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	

f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-3]$ و على المجال $[1;+\infty[$

f دالة متناقصة تماما على المجال $]-1;1]$ و على المجال $[-3;-1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

5) أ) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مـــائل:

لدينا، $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-x+1\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستثيم مقارب مائل لـ (C_f)

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)=\frac{4}{x+1}$

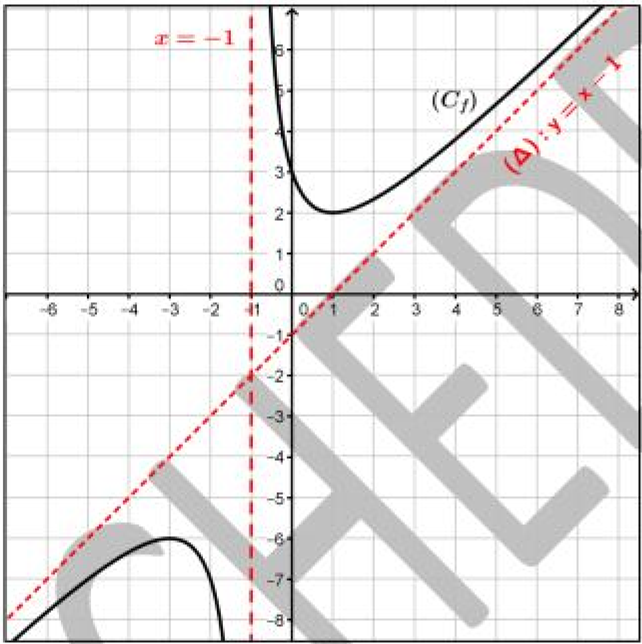
♦ (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-1;+\infty[$ ♦ (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;-1[$

6) معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبة 3 :

لدينا النقطة ذات الترتيبة 3 فاصلتهـا 0 (حسب الجزء1) و عليه معادلة المماس (Δ) هي :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $\boxed{y=-3x+3}$.

7) الرسم (C_f) و (Δ) :



8) حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا يعود الي تعين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y=m$

بقراءة بيانية نجد أن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشـــــارة من أجل : $m\in]3;+\infty[$

III) تعيين إتجـــاه تغير الدالة h :

من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $h'(x)=2f'(2x+1)$

إشـــــارة $h'(x)$ من إشارة $f'(2x+1)$

$f'(2x+1)\ge0$ من أجل $2x+1\ge1$ أو $2x+1\le-3$ أي $x\ge0$ أو $x\le-2$

$f'(2x+1)\le0$ من أجل $-1<2x+1\le1$ أو $-3\le2x+1<-1$ أي $-1<x\le0$ أو $-2\le x<-1$

و عليه : h دالة متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$

h دالة متناقصة تماما على $]-1;0]$ و $[-2;-1[$