حل تطبيقات ص 188.

1) ABC مثلث.

تبيين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

لدينا: $\boxed{1-2+3\neq 0}$ لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ تكافئ: $\left\|(1-2+3)\overrightarrow{MG}\right\|=6$ أي: $\boxed{MG=3}$.

إذن: مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ هي دائرة مركزها G

ونصف قطرها $r=3$.

2) ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين من المستوي. حيث $CA=CB=1$.

تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$.

لدينا: $\boxed{-2+1-3\neq 0}$ لتكن I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,1);(C,-3)\}$

$\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$ تكافئ: $\left\|(-2+1-3)\overrightarrow{MI}\right\|=\sqrt{5}$ أي: $\boxed{MI=\frac{\sqrt{5}}{4}}$.

إذن: مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$ هي دائرة مركزها I ونصف قطرها

$r=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

الإنشاء:

3) ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=1$.

تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$:

لدينا: $\boxed{1-1+2\neq 0}$ لتكن J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$ تكافئ: $\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|=\sqrt{3}$ أي: $\boxed{MJ=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

إذن: مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$ هي دائرة مركزها J ونصف قطرها

$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

الإنشاء:

4) ABC مثلث.

تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$:

لدينا: $\boxed{1+1+2\neq 0}$ لتكن P مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$

ولدينا: $\boxed{1+1\neq 0}$ لتكن Q مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1)\}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ: $\left\|4\overrightarrow{MP}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MQ}\right\|$ أي: $\boxed{MP=MQ}$.

إذن: مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ هي محور القطعة المستقيمة $[PQ]$.

5) ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=\alpha$. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

نضع $M=B$ نجد: $\left\|\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$ إذن: $\boxed{B\in(\Gamma)}$.

تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M : (مجموع المعاملات يساوي 0)

باستعمال علاقة شال ندخل A

نجد: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$.

وبالتالي: الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M .

لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-4);(C,1)\}$.

تبيين أن $GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ: $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$

ومنه: $\boxed{2GM=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|}$.

باستعمال نظرية فيتاغورث نجد: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\alpha\sqrt{3}$ ومنه: $\boxed{GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

من المساواة $GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ نستنتج أن المجموعة (Γ) دائرة مركزها G ونصف قطرها $\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

انشاء المجموعة (Γ) :

تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$:

لدينا: $\boxed{1+1+2\neq 0}$ لتكن P مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$

ولدينا: $\boxed{1+1\neq 0}$ لتكن Q مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1)\}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ **تكافئ:** $\left\|4\overrightarrow{MP}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MQ}\right\|$ **أي:** $\boxed{MP=MQ}$.

إذن: مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ هي محور القطعة المستقيمة $[PQ]$.

5) ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=\alpha$. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ):

نضع $M=B$ **نجد:** $\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$ **إذن:** $\boxed{B\in(\Gamma)}$.

تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M: (مجموع المعاملات يساوي 0)

باستعمال علاقة شال ندخل A

نجد: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$.

وبالتالي: الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M.

لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-4);(C,1)\}$.

تبيين أن $GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ **تكافئ:** $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|$

ومنه: $\boxed{2GM=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|}$.

باستعمال نظرية فيتاغورث **نجد:** $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\alpha\sqrt{3}$ **ومنه:** $\boxed{GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

من المساواة $GM=\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ نستنتج أن المجموعة (Γ) دائرة مركزها G ونصف قطرها $\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

انشاء المجموعة (Γ):

حل النشاط الموجود في الصفحة 189

استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمات:

* I نظيرة O منتصف القطعة [AB]بالنسبة إلى B و منه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ و لكن $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{IB}$

و $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ إذن :

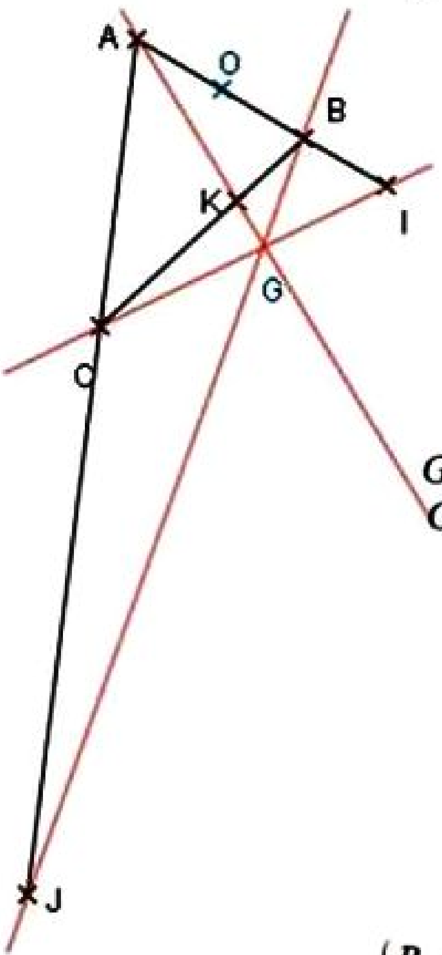
$\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ اي $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ وبالتالي I مرجح للنقطتين $(A,1),(B,-3)$

* لدينا $2\overrightarrow{JA}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ و بالتالي J مرجح للنقطتين $(A,2),(C,-3)$

* لدينا $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و منه $3\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}$ و منه $3\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}$ و منه

$3\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ أي أن $2\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ اي أن $-2\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ أي أن

$2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ و بالتالي K مرجح للنقطتين $(B,2),(C,1)$



إثبات أن المستقيمات(CI).(BJ).(AK)متقاطعة

لتكن G مرجح النقط $(A,2),(B,-6),(C,-3)$

قد نتسائل من أين أتينا بهذه المعاملات ؟

الجواب :

J مرجح للنقطتين $(A,2),(C,-3)$

K مرجح للنقطتين $(B,2),(C,1)$ بالضرب في -3

نجد أن K مرجح للنقطتين $(B,-6),(C,-3)$

لاحظ أن معاملي C متساويان

ولتكن G مرجح النقط $(A,2),(B,-6),(C,-3)$

باستعمال خاصية التجميع نستنتج أن :

G مرجح النقطتين $(J,-1),(B,-6)$ و منه $G\in(JB)$

و G مرجح النقطتين $(K,-9),(A,2)$ و منه $G\in(AK)$

يجب أن نبرهن الآن أن $G\in(IC)$:

بما أن G مرجح النقط $(A,2),(B,-6),(C,-3)$ فإن

$$2\overrightarrow{GA}-6\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

ندخل النقطة I باستعمال علاقة شال :

$$2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA})-6(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}-6\overrightarrow{GI}-6\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}-6\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{GI}+\cancel{2(\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB})}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

و لكن $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ لأن I مرجح للنقطتين $(A,1),(B,-3)$

إذن $-4\overrightarrow{GI}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و منه نستنتج أن G مرجح النقطتين $(C,-3),(I,-4)$ و منه $G\in(IC)$

برهنا أن $G\in(JB)$ و $G\in(AK)$ و $G\in(IC)$ و هذا يعني أن المستقيمات $(AK),(BJ),(CI)$ متقاطعة في النقطة G .