الحساب المثلثي - صيغ التحويل | سلسلة التمارين | من انجاز الأستاذ : طارق بوزيد

تمرين1 : تطبيق الدرس

1) أحسب النسب المثلثية للأعداد : $\frac{5\pi}{24};\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{8}$

2) بين أن : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3) بين أن : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

4) عمل : $\cos 3x + \cos 7x$

5) حل في $[-\pi,\pi]$ ما يلي :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$$

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x < -\sqrt{2}$$

تمرين 2 : معادلات ومتراجحات مثلثية

- نعتبر في IR المعادلة :

(E) : tg x + 2cos x -2sin x -1 = 0

أ- بين أنه إذا كان $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن المعادلة (E) تكافئ :

(E') : (sin x – cos x)(2 cos x - 1) = 0

ب- حل في IR المعادلة (E)

ج- حل في $[0,2\pi]$ المتراجحة :

(sin x – cos x)(2 cos x - 1) < 0

حل في $\mathbb{R}$ المعدلات التالية :

1. $\cos^2 x = \sin^2 x$
2. $\cos x + \sin x = 1$
3. $\cos x + \sin x = 2$
4. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) = 1$
5. $\cos^4 x + \cos 2x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = 1$
6. $1 - \sin 4x - \cos 4x = 0$
7. $tg3x = tg2x + tgx$
8. $3\sin x - 4\cos x = 1$
9. $(\sqrt{2}-1)\cos 2x + \sin 2x - 1 = 0$
10. $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$
11. $\cos 3x - \sin 3x - 1 = 0$
12. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$
13. $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$
14. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = m \quad (m \in \mathbb{R})$
15. $3m\sin 2x + (m-1)\cos 2x - 1 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$
16. $(1+m)\cos x + (1-m)\sin x = 2m \quad (m \in \mathbb{R})$
17. $\sin^6 x + \cos^6 x = m \quad (m \in \mathbb{R})$
18. $\sin 2x + \sin x = m + \cos x \quad (m \in \mathbb{R})$

تمرين 5 : محلات هندسية

19. $\cos^2\left(\frac{x+m}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x-m}{2}\right) = 1 \quad (m \in \mathbb{R})$

20. $\sin(x-m) = \sin x + \sin m \quad (m \in \mathbb{R})$

حل في IR^2 الجملة التالية:

$$\begin{cases} \sin x = \sin y \\ 2x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تمرين 3 : المتراجحات المثلثية

حل في $[-10\pi,3\pi]$ المتراجحة :

1) $2\sin 3x < 1$

حل في $[-2\pi,\pi]$ المتراجحة :

2) $2\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x \geq -\sqrt{2}$

حل في $[-\pi,\pi]$ المتراجحة :

3) $2\cos x\cos 3x < 1$

حل في IR المتراجحات التالية:

4) $\sin x \cos x \geq \sqrt{2}$

5) $tg^2 x + (\sqrt{3}-1)tg\,x - \sqrt{3} < 0$

6) $tg^2 x(1-\sin x) \geq 1 - \cos x$

تمرين 6 : معادلات مثلثية

لكل x من $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$ نضع :

$$A(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)$$

1) بين أن : $A(x) = \tan(x)\sin(x)$

2) بين أن : $A(\pi - x) = A(\pi + x) = -A(x)$

3) حل في IR المعادلة : $A(x) = \cos(x)$ ثم مثل حلولها على الدائرة المثلثية .

نعتبر الدالة $g(x) = \sqrt{3}(4\cos^4 x + \sin^2 2x) - 2\sin 2x$

1) احسب $g(\frac{\pi}{3})$ و $g(\pi)$.

2) بين أن $(\forall x \in IR): 4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^3 2x$

3) a) بين أن $g(x) = 4\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

b) حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المعادلة $g(x)=0$.

4) a) تحقق أن $(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: g(x) = 4\cos^2 x(3 - \tan x)$

b) حل في $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المتراجحة $g(x) \geq 0$.

سلسلة التمارين

تحويل المجموع الى جداء والعكس

تمرين 1

لكل $x, y \in \mathbb{R}$ عمل :

1) $\cos 3x + \cos 7x$
2) $\cos 2x + \cos x$
3) $\sin 2x + \sin x$
4) $\cos 2x - \cos x$
5) $\sin 5x + \sin 3x$

تمرين 2

نعتبر المعادلة التالية في $\mathbb{R}$: $(E): \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

1) بتوظيف صيغ تحويل المجموع الى جداء عمل (E)
2) حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ المعادلة (E)
3) حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ المتراجحة :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x \geq 0$$

معادلات ومتراجحات مثلثية

تمرين 3

نعتبر في IR المعادلة :

(E) : tg x + 2cos x -2sin x -1 = 0

أ- بين أنه إذا كان $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن المعادلة (E) تكافئ :

(E') : (sin x – cos x)(2 cos x - 1) = 0

ب- حل في IR المعادلة (E)

ج- حل في $[0,2\pi]$ المتراجحة :

(sin x – cos x)(2 cos x - 1) < 0

معادلات مثلثية متنوعة

حل في $\mathbb{R}$ المعدلات التالية :

1. $cos^2x = sin^2x$
2. $cos\ x + sin\ x = 1$
3. $cos\ x + sin\ x = 2$
4. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) = 1$
5. $\cos^4 x + \cos 2x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = 1$
6. $1 - \sin 4x - \cos 4x = 0$
7. $tg\,3x = tg\,2x + tgx$
8. $3\sin x - 4\cos x = 1$
9. $(\sqrt{2} - 1)\cos 2x + \sin 2x - 1 = 0$
10. $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$
11. $\cos 3x - \sin 3x - 1 = 0$
12. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$
13. $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$

صيغ التحويل الأساسية

تمرين 4

-أحسب النسب المثلثية للأعداد : $\frac{7\pi}{8}$ $\frac{\pi}{8}$ $\frac{5\pi}{12}$ $\frac{\pi}{12}$

لاحظ أن : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

و $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ و $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

تمرين 5

لكل $x, y \in \mathbb{R}$ بين أن :

1) بين أن : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
2) بين أن : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

متراجحات المثلثية

تمرين 6

حل في $[-\pi, \pi]$ ما يلي :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$$

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x < -\sqrt{2}$$

تمرين 7

حل في $[-10\pi, 3\pi]$ المتراجحة : $2\sin 3x < 1$

تمرين 8

حل في $[-2\pi, \pi]$ المتراجحة :

$$2\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x \geq -\sqrt{2}$$

تمرين 9

حل في $[-\pi, \pi]$ المتراجحة :

$$2\cos x \cos 3x < 1$$

تمرين 10

حل في IR المتراجحات التالية:

1) $\sin x \cos x \geq \sqrt{2}$
2) $tg^2 x + (\sqrt{3} - 1)\,tg\,x - \sqrt{3} < 0$
3) $tg^2 x(1 - \sin x) \geq 1 - \cos x$

معادلات مثلثية بوسيط حقيقي

14. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = m \quad (m \in \mathbb{R})$
15. $3m\sin 2x + (m-1)\cos 2x - 1 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$
16. $(1+m)\cos x + (1-m)\sin x = 2m \quad (m \in \mathbb{R})$
17. $\sin^6 x + \cos^6 x = m \quad (m \in \mathbb{R})$
18. $\sin 2x + \sin x = m + \cos x \quad (m \in \mathbb{R})$