مذكرات دروس السنة الثانية ثانوي

الأستــاذ:
معزوز ميـــــلود أستاذ تعليم ثانوي

تم رقن هذا العمل ببرنامج بـ: ArabTEX

المستــــوى: 2 علوم تجريبية
ميــــدان التعَلم : النهـــــايات
المـــيدان: تحليل .
الكفاءات المستهدفة: حساب ومعرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو $+\infty$ أو إلى $-\infty$ مع التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0 . (السلوك التقاربي)
– حساب نهاية دالة ناطقة عند a حيث a حد لـ : D_f .
المـدة الزمنية: سا
الوسائل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$V-1)$: نهاية دالة عند مالا نهاية

مثــــــــال 01 :

f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 2x - 3$. الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وجدول تغيراتها

• الجدول الأتي يعطي قيما للمتغير الحقيقي x و $f(x)$ الموافقة لها :

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	17	197	1997	19997	199997

من هذا الجدول نلاحظ كلما أخذ x قيما كبيرة جدا إلى وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند $+\infty$ (عندما يؤول x إلى $+\infty$) هي $+\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• الجدول الأتي يعطي قيما للمتغير الحقيقي x و $f(x)$ الموافقة لها :

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5
$f(x)$	-23	-203	-2003	-20003	-200003

من هذا الجدول نلاحظ كلما أخذ $|x|$ قيما كبيرة أكثر فأكثر مع $x < 0$ إلى وأخذ $|f(x)|$ قيما كبيرة جدا مع $f(x) < 0$.

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند $+\infty$ (عندما يؤول x إلى $-\infty$) هي $+\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. من البيان نلاحظ هذا كذالك.

مثــــــــال 02 :

f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^2$. لدينا وجدول تغيراتها

- نلاحظ كلما أخذ x قيما كبيرة جدا إلى وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند $+\infty$ (عندما يؤول x إلى $+\infty$) هي $+\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- نلاحظ كلما أخذ $|x|$ قيما كبيرة جدا مع $x < 0$ إلى وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند $+\infty$ (عندما يؤول x إلى $+\infty$) هي $+\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

مثــــــــال 03 :

f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{1}{x}$. لدينا جدول تغيراتها

- نلاحظ أنه يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من العدد 0 بقدر ما نريد شريطة أنّ يكون x كبيرا بالقدر الكافي

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند $+\infty$ (عندما يؤول x إلى $+\infty$) هي 0^+ ونكتب : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.

بنفس الطريقة نجد $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0^-$.

ملاحظــــــــة:

نلاحظ أنه لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ (x يقترب) المنحنى الممثل للدالة f ؛ يقترب شيئا فشيئا من المستقيم المعرف بالمعادلة $y = 0$ (حامل محور الفواصل) .

المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل :

بصفة عامة:

f دالة عددية ، C_f تمثيلها البياني في معلم وَ y_0 ثابت حقيقي .

تعريـــــــف:

- إذا كانت $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = y_0$. نقول إنّ المستقيم المعرف بالمعادلة $y = y_0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- إذا كانت $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = y_0$. نقول إنّ المستقيم المعرف بالمعادلة $y = y_0$ مستقيم مقارب للمنحنى

(C_f) عند $-\infty$.

مبرهنـــــة : (تقبل بدون برهان)

a ثابت حقيقي

- $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x+a} = 0^-$
- $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x+a} = 0^+$

أمثلـــــة:

f دالة عددية ، C_f تمثيلها البياني في معلم .

1. نأخذ f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = -1 + \frac{1}{x}$.

لدينا $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ إذنّ : $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} f(x) = -1$ ومنه : المستقيم المعرف بالمعادلة $y = -1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.

2. نأخذ f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كمايلي : $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ إذنّ : $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$ ومنه : المستقيم المعرف بالمعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.

3. نأخذ f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كمايلي : $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

لدينا $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ إذنّ : $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$ ومنه : المستقيم المعرف بالمعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.

$V - 2)$: نهاية دالة عند عدد

مثـــــال 1 :

f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \frac{1}{x}$.

- لدينا الجدول التالي :

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$	10	10^2	10^3	10^4	10^5

لدينا جدول تغيراتها السابق

نلاحظ أنه كلما أخذ x قيما قريبة من العدد 0 إلا وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا .

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند 0 (عندما يؤول x إلى 0) هي $+\infty$ ونكتب :
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ وَ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

مثـــــــال 2 :

f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = 2x + 1$.

لندرس سلوك الدّالة f عند العدد 1 (عندما يؤول x إلى 1)

- لدينا الجدول التالي

x	0.7	0.8	0.9	0.98	0.99	1.01	1.1	1.2	1.4	1.5
$f(x)$	2.4	2.6	2.8	2.9	2.98	3.02	3.2	3.4	3.8	4

نلاحظ أنه كلما أخذ x قيما قريبة من العدد 1 إلا وأخذ $f(x)$ قيما قريبة من العدد 3 .

ونعبر عن هذا القول إنّ نهاية f عند 1 (عندما يؤول x إلى 1) هي 3 ونكتب : $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

ملاحظـــــــــة :

نلاحظ أنه لما x يؤول إلى 0 ، (x يقترب) المنحنى الممثل للدالة f ؛ يقترب

شيئا فشيئا من المستقيم المعرف بالمعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) .

المستقيم القارب الموازي لحامل محور التراتيب :

بصفة عامة :

f دالة عددية ، C_f تمثيلها البياني في معلم وَ x_0 ثابت حقيقي .

تعريـــــف :

- إذا كانت نهاية الدالة f عند x_0 (أو عند x_0 من اليمين أو من اليسار) هي :

$-\infty$ أو $+\infty$.

نقول إنّ المستقيم المعرف بالمعادلة $x = x_0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

مبرهنــــــة : (تقبل بدون برهان)

a ثابت حقيقي

- $\lim_{x \overset{<}{\to} a} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} a} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$
- $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$.

أمثلـــــة:

f دالة عددية ، C_f تمثيلها البياني في معلم .

1. نأخذ f المعرفة على : $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$

إذنّ : المستقيم المعرف بالمعادلة $x=2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

2. نأخذ f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}f(x)=+\infty$ ومنه : المستقيم المعرف بالمعادلة $x=3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

$\star$ 3. نأخذ f المعرفة على : $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$

إذنّ : المستقيم المعرف بالمعادلة $x=-2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

تمـــــارين :

تمرين : $11,10$ و 12 صفحة 131 .

المستقيم القارب المعرف بالمعدلة $y=ax+b$ حيث : b,a ثابتان حقيقيان :

مثـــــال :

f الدّالة المعرفة على المجموعة : $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+d\frac{1}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

(Δ) المستقيم المعرف بالمعادلة $y=x+1$.

لدينا : $f(x)-y=Mp=\dfrac{1}{x}$ إذنّ لما x يؤول إلى $+\infty$ فإنّ الطول يؤول إلى العدد 0 ونلاحظ في هذه الحالة أنّ المنحنى (C_f) يقترب شيئا فشيئا من (Δ) .

ونقول إنّ المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x+1$ مستقيما مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بصفة عامة:

f دالة عددية ، C_f تمثيلها البياني في معلم و (Δ) مستقيم معرّف بالمعادلة $y=ax+b$.

تعريـــــــــف:

نقول عن المستقيم أنّه مستقيم مقارب للمنحنى عند $+\infty$ ($-\infty$) إذا؛ إذا؛ وفقط إذا؛ كان : $\lim_{x\longrightarrow+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ($\lim_{x\longrightarrow-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) على الترتيب.

أمثلـــــــة: 1) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم

(Δ) املستقيم المعرف بالمعادلة $y=x-2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ : $f(x)-y=\dfrac{1}{x}$ $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty}[f(x)-y]=0$ اذن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x-2$ مستقيما مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

2) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم

(Δ) املستقيم المعرف بالمعادلة $y=1$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}/\{1\}$ فإنّ : $f(x)-y=\dfrac{1}{x-1}$ ومنه $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty}[f(x)-y]=0$ اذن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=1$ مستقيما مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة معرّفة كمايلي : $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ حيث φ دالة تحقق مايلي $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\varphi(x)=0$ فإنّ : المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+b$ مستقيما مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

أمثلـــــــة: 1) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ كمايلي : $f(x)=2x-1\dfrac{1}{x-2}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم

من أجل كل x من $\mathbb{R}/\{1\}$ فإنّ : $f(x)=2x-1+\varphi(x)$ هيث : $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty}\varphi(x)=0$ اذن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=2x-1$ مستقيما مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

2) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}/\{-3\}$ كمايلي : $f(x)=-2\dfrac{1}{(x+3)^2}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم

من أجل كل x من $\mathbb{R}/\{-3\}$ فإنّ : $f(x)=-2+\varphi(x)$ هيث : $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty}\varphi(x)=0$ اذن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=2x-1$ مستقيما مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

التقويم:

تمارين: التمرين 45 صفحة 136 .

التمرين 7 صفحة 26 .

بِٱلتَّوْفِيقْ

المستـــوى: 2 علوم تـجريبية ميـــدان التعَلم: النهـــايات

المـــيدان: تحليل . الكفاءات المستهدفة: استعمال النظريات الأولية (المجموع ، الجداء المقلوب و النسبة) لحساب النهايات.

المـدة الزمنية: سا الوسائل التعليميـة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$V-3$) عمليات على النهايات :

أ) مـــلاحظات :

• يتم ؛ بصفة عامة ، حساب نهاية دالة عند كل حدّ من حدود مجال أو مجالات تعريفها.

• إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند قيمة x_0 فإنّ : $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

• إذا قبلت دالة نهاية عند عدد حقيقي x_0 فإنّ هذه النهاية وحيدة.

ب) المبرهنات الأولية على النهايات :

1) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 2$.

2) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$.

3) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ بـ : $f(x) = x + \dfrac{1}{(x+3)^2}$.

4) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + 2$.

5) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2$ ، 6) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$ ، 7) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

8) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

9) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{4}{(-x-3}$.

$V-4$) حالات عدم التعيين :

حالات عدم التعيين هي : $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty \times 0, \infty - \infty$

أمثلـــة :

1) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ، $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ ح ع ت
.

إزالتها $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$.

2) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x^3-x^2+2$.

قـــــاعدة :

نهاية دالة كثير الحدود عند $-\infty$ (علي الترتيب $+\infty$) هي نهايت الأعلي درجة عند $-\infty$ (علي الترتيب $+\infty$).

3) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

4) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

قـــــاعدة :

نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$ (علي الترتيب $+\infty$) هي نهايت نسبة الحدّ الأعلى درجة في البسط إلى الحدّ الأعلى درجة في المقام الأعلي عند $-\infty$ (علي الترتيب $+\infty$).

5) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 2 علوم تجريبية ميـــــدان التعّلم: النهـــــــايات
المـــــيدان: تحليل . الكفاءات المستهدفة: البحث عن مستقيم مقارب مائل.
المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$V - 4)$ البحث عن مستقيم مقارب مائل :

نتـــــيجة :

f دالة وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

(Δ) مستقيم معرّف بالمعادلة $y = ax + b$ حيث : b, a ثابتان حقيقيان مع $a \neq 0$.

يكون المستقيم مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب $-\infty$) إذا ؛ وفقط إذا ؛ تحقق مايلي :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ وَ } \lim_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$$

(على الترتيب $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وَ $\lim_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$.

أمثلـــــــة

f الدّالة المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

- لدينا : $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. (إمكانية وجود مستقيم مقارب لـ C_f عند $-\infty$)

$\lim_{x \longrightarrow -\infty\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$. إذنّ : المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

- لدينا : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (إمكانية وجود مستقيم مقارب لـ C_f عند $+\infty$)

المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

الأعمال موجهة (ص 126) :

دراسة كثير الحدود من الدرجة الثالّث :

دراسة مثــــــــال

الأعمال موجهة (ص 127) :

المستـــــوى: 2 علوم تـجريبية ميـــــــدان التعّلم : الزوايا الموجّهة

المـــــيدان: تحليل . الكفاءات المستهدفة:

– حساب نهاية دالة ناطقة عند a حيث a حد لـ : D_f .

المــدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

في كل مايأتي في هذا المحتوى المعرفي ، المستوى موجه .

$VI-1$) **الزوايا :**

$I-4$) **الاستمرارية :**