الباب الخامس : أنشطة و طرائق – ج م ع ت –

تمـاريـن محلـولـة و طرائق

لمستوى الأولـى ثـانوي

جذع مشترك علـوم و تكنـولـوجيـا

تــمـــريـــــن 1 :

أكمل في الجدول التالي كل عدد معطى في العمود الموافق للمجموعة التي ينتمي إليها

	N	Z	D	Q	R
$-3,2$					
$-\frac{6}{3}$					
5					
$-\frac{3}{4}$					
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{16}$					
0					
π					

تــمـــريـــــن 2 :

بسط واكتب النتيجة على شكل جداء أو حاصل قسمة قوى أسسها موجبة .

$$1-\ a)\ \frac{\left(a^2 . b\right)^{-3} \times c^2}{ab^{-3}} \quad ; \quad b)\ \frac{-a^2 \times cb^{-1}}{ab} \quad ; \quad c)\ \frac{(-a)^2 . 2b}{2b^{-1}}$$

$$2-\ a)\ \frac{\left(a^2\, b\right)^{-3} \times c^5 . a^4}{a\left(bc^2\right)^2 . b^{-1}} \quad ; \quad b)\ \frac{(-a)^5 . b . c^{-2}}{b^3 (-c)^{-3} . a^2}$$

حيث : a , b , c أعداد حقيقية غير معدومة .

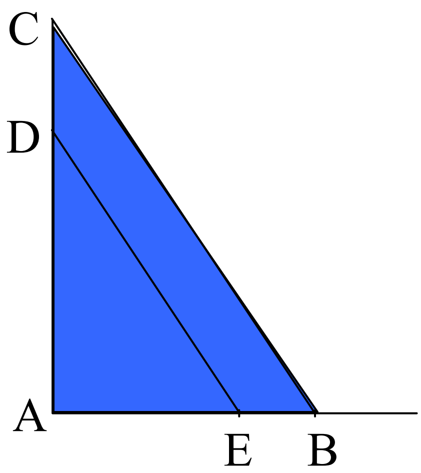
تـــمـــريــــن 3 :

ليكن العدد : $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

1) عين مقلوب φ أي : $\dfrac{1}{\varphi}$.

2) تحقق أن : $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ و $\varphi^2 = \varphi + 1$

تـــمـــريــــن 4 :



في المثلث ABC (الشكل) . ليكن (ED) يوازي (BC)

و لدينا : $* AE = 2\sqrt{3} - 1$

$* AD = 2 + \sqrt{3}$

$* EB = 1$

1) احسب DC . و اعط النتيجة على الشكل : $a + b\sqrt{3}$

2) إذا كان ABC قائم في A . احسب DE .

تـــمـــريــــن 5 :

- أعط الكتابة العلمية و رتبة المقدار للأعداد التالية :

1) سرعة الضوء في الخلاء هي : 300 000 000 m / s

2) إذا افترضنا أن الأرض مكونة من حبات الرمل فإنها تحتوي على 300 مليار من المليار حبة رمل .

3) طول السنة الضوئية .

ملاحظة : المسافة = السرعة × الزمن

تـــمــــريـــــن 6 :

باستعمال الحاسبة أعط القيمة المدورة ذات 4 أرقام ذات معنى للأعداد التالية :

1- a) $\dfrac{250}{11}$; b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$; c) $43,57 \times 0,009$

d) $\dfrac{547}{1,43}$; e) $\dfrac{700}{3\sqrt{2}}$

2 – a) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{30}$; b) $\dfrac{41}{12}-\sqrt{2}$; c) $\dfrac{105}{104}-\dfrac{\sqrt{26}}{5}$

تـــمــــريـــــن 7 :

بسط الكسور الآتية :

$$* \quad P = \frac{(-15)^2 \times (-345)^5 \times 64 \times (-5)^6 \times (49)^2 \times (161)^4}{(23)^5 \times (1225)^4 \times 480 \times (25)^{-2} \times 15^4 \times (115)^4}$$

$$* \quad Q = \frac{(-60)^5 \times (-3)^{24} \times (-5)^4 \times (-8)^6 \times (-16)^3}{9^5 \times (40)^3 \times (-36)^2 \times (6)^{10} \times (48)^5 \times (625)^2}$$

$$* \quad R = \frac{3 \times 10^{-4} \times (5^{-8})^2 \times 10^6 \times 16 \times 10^{-2} \times 11}{2 \times 10^2 \times 0,00003 \times (44) \times 10^{-7} \times (25)^{-4}}$$

تـــمــــريـــــن 8 :

a عدد طبيعي أولى ، b عدد طبيعي . عين القيم الممكنة للعددين a , b بحيث :

$a \times b = 1200$

تــمـــريـــن 9 :

d أعداد حقيقية حيث : $2,5 \leq b \leq 2,6$; $1,3 \leq a \leq 1,4$

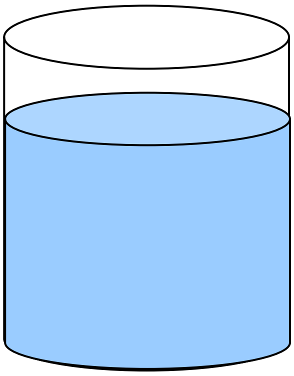
$8,1 \leq d \leq 8,2$; $3,1 \leq c \leq 3,2$

عين حصرا للعدد k حيث : $k = \sqrt{\dfrac{a^2 + bc}{d - c}}$

تــمـــريـــن 10 :

بئر على شكل أسطوانة دائرية . قاعدته دائرة (C) نصف قطرها R و ارتفاعه H حيث :

$50,9 \leq H \leq 50,8$; $4,3 \leq R \leq 4,4$; $3,14 \leq \pi \leq 3,15$



1 – عين حصرا لمساحة قاعدة البئر.

2 – عين حصرا لحجم البئر .

3 – ملأ $\frac{3}{4}$ من حجمه ماء . عين حصرا لحجم الماء .

تــمـــريـــن 11 :

نعتبر العبارة : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1}$ ، حيث x عدد حقيقي .

1) إذا علمت أن : $2 \leq x \leq 3$ عين حصرا للعدد $f(x)$.

2) عين حصرا للعدد $f(x)$ إذا كان : $n \leq x \leq n + 1$ حيث n عدد طبيعي .

تــمــريـــن 12 :

ABCD رباعي ضلعاه [AD] و [BC] متقايسان و قطراه [AC] و [BD] متقايسان .

1) برهن أن المثلثين ABC و ABD متقايسان .

2) برهن أن المثلثين ACD و BDC متقايسان .

تــمــريـــن 13 :

ABCD مستطيل حيث : $AB = 16$, $AD = 20$ (وحدة الطول هي cm)

K نقطة من [AD] بحيث : $AK = 15$

L نقطة من [AB] بحيث : $AL = X$ حيث X عدد حقيقي موجب .

1) احسب كل من : LK^2 , KC^2 , LC^2

2) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين [KC] و [KL]

3) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL قائم في K .

تــمــريـــن 14 :

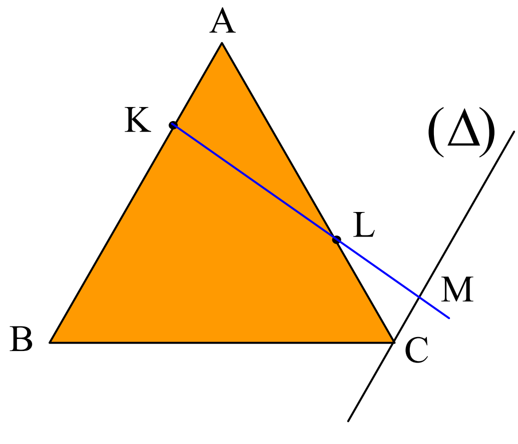
ABC مثلث حيث : $AB = AC = 20$ (وحدة الطول هي cm) .

K نقطة من [AB] بحيث : $AK = x$ مع $x < 10$.

L نقطة من [AC] بحيث : $CL = 6$.

(Δ) المستقيم الذي يشمل C و يوازي (AB) .

المستقيم (KL) يقطع (Δ) في M .



1) بين أن : $MC = \frac{3x}{7}$

2) عين x بحيث : $MC = 3$

تـــمـــريـــن 15 :

(C) دائرة مركزها O .

A , B , D , E أربعة نقط من (C) حيث يتقاطع المستقيمان (AD) و (BE) في النقطة L .

- أثبت أن المثلثان ALE و BLD متشابهان .

تـــمـــريـــن 16 :

x عدد حقيقي . 1 - بسط العبارة p (x) حيث :

$$p(x)=\text{Cos}(x+91\pi)+\text{Sin}(x-60\pi)+\text{Sin}\left(x+\frac{9\pi}{2}\right)-\text{Cos}\left(x+\frac{21\pi}{2}\right)$$

2- حل في R المعادلة : $p(x) = 0$

3- حل في R المعادلة : $p(x+2\pi) = p(-x)$

4- ثم مثل صور هذه الحلول على الدائرة المثلثية .

تمـــريـــن 17 :

x عدد حقيقي نعتبر النسبة :

$$Q(x)=\frac{\mathrm{Cos}(\pi+x)-\mathrm{Sin}(\pi+x)+\mathrm{Cos}(\pi+x)-\mathrm{Sin}(\pi-x)}{\mathrm{Cos}^2(\pi+x)-\mathrm{Sin}^2(\pi+x)}$$

1 - عين قيم x حتى تكون $Q(x)$ معرفة .

2 - بين أن : $Q(x)=\frac{-2\,\mathrm{Cos}\,x}{2\,\mathrm{Cos}^2-1}$

3 - حل في $[0,2\pi]$ المعادلة : $Q(x)=2$

لاحظ أن : $(x+1)(2x-1)=2x^2+x-1$

تمـــريـــن 18 :

أذكر صحة أو خطأ ما يلي :

1) $a(x+y)^2=(ax+ay)^2$	☐
2) $a(x-y)^2=(a^2x-a^2y)^2$	☐
3) $(2x-3)^2=4x^2+9$	☐
4) $x^2+4=(x+2)(x+2)$	☐
5) $(2a-b)^2=4a^2-4ab+b^2$	☐
6) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$	☐

تـــمـــريـــن 19 :

1) نعلم أن : $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

- انشر العبارة $(a-b)^3$ ثم بسطها و اختصرها .

2) انشر العبارتين $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

ماذا تستنتج ؟

3) انشر و اختصر العبارة $(a+b+c)^2$ ثم استنتج : $(4x^2-x+1)^2$

تـــمـــريـــن 20 :

أكتب العبارات التالية على شكلها النموذجي : $f(x) = 6x^2 - x - 1$

$p(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ ؛ $Q(x) = 3x^2 + x + 12$

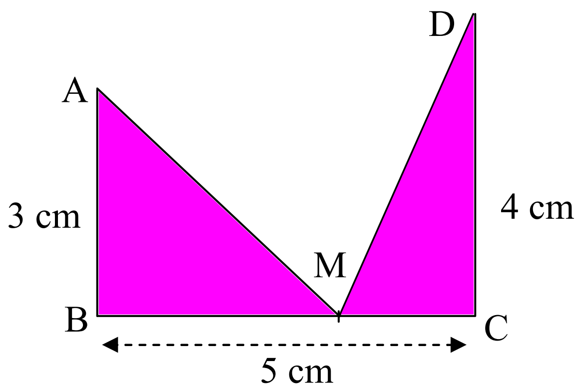
* حلل إلى جداء كل من هذه العبارات إن أمكن .

* استنتج حلول كل من المعادلات : $f(x) = 0$ و $p(x) = 0$ و $Q(x) = 0$

تـــمـــريـــن 21 :

إليك الشكل المقابل :

عين وضع النقطة M بحيث تكون : $AM = DM$.



تـــمـــريــــــن 22 :

هل يوجد مستطيل مساحته $6\ Cm^2$ ومحيطه $10\ Cm^2$.

يطلب تعيين الحل جبريا ثم بيانيا .

تـــمـــريــــــن 23 :

باستعمال آلة بيانية أنشئ التمثيلات البيانية (U_1) ; (U_2) ; (U_3) للدوال f , g , h على الترتيب حيث :

$$h(x) = x + 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{4}{x} \quad ; \quad f(x) = x^2 - x$$

* حل بيانيا المعادلة : $f(x) = -2$

* حل بيانيا المتراجحة : $f(x) > -2$

* حل حسابيا ثم بيانيا المتراجحة : $\frac{4}{x} \leq x + 3$

* حل حسابيا ثم بيانيا المتراجحة : $x + 3 \geq x^2 - x$

تـــمـــريــــــن 24 :

باستعمال الحاسبة البيانية أنشئ تمثيلا بيانيا (γ) للدالة f حيث : $f(x) = \text{Sin}\, x$

على المجال $[-\pi , \pi]$.

- استنتج بيانيا على $[-\pi , \pi]$ حلول المعادلات التالية :

$1)\ f(x) = -1 \quad ; \quad 2)\ f(x) = 1 \quad ; \quad 3)\ f(x) = 0$

- استنتج بيانيا على $[-\pi , \pi]$ حلول المتراجحات التالية :

$1)\ f(x) \leq -1 \quad ; \quad 2)\ f(x) > 1 \quad ; \quad 3)\ f(x) \geq 0$

ما هو عدد حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$ عينها بتقريب $0{,}001$.

تــمـــريـــــن 25 :

ABCD متوازي الأضلاع الذي مركزه O . I منتصف [AB] . المستقيم الذي يوازي (AC) ويشمل D يقطع المستقيم الذي يوازي (BD) ويشمل C في النقطة J .

- برهن أن J , I , O على استقامة واحدة .

تــمـــريـــــن 26 :

A , B , C ثلاث نقط في المستوي ليست على استقامة واحدة :

1 – بين أن الشعاع $\vec{V} = \vec{NA} - 2\,\vec{NB} + \vec{NC}$ ثابت .

حيث N نقطة متغيرة في المستوي .

2 – أنشئ النقطة O حيث : $\vec{AO} = \vec{V}$.

تــمـــريـــــن 27 :

المستوي منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{U}$, $\vec{V}$ شعاعان حيث :

$$\vec{U} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{V} = 4\,\vec{i} - \vec{j}$$

1 – أثبت أن $(O, \vec{U}, \vec{V})$ معلما للمستوي .

2 – N نقطة في المستوي إحداثياها (x, y) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و احداثياها (x', y') في المعلم $(O, \vec{U}, \vec{V})$. أكتب x', y' بدلالة x, y .

3 – هل توجد نقطة لها نفس الإحداثيين في المعلمين .

تمرين 28 :

في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ يعطى المستقيمان :

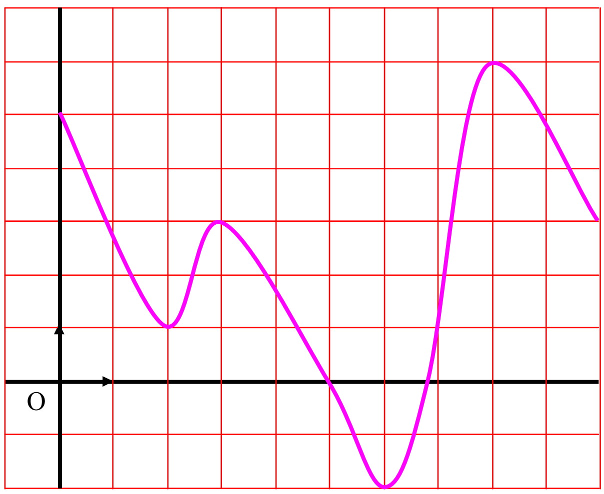
$(\Delta): \; mx + (m-1)y - 2 = 0$

$(D): \; (m+1)x + (7m-5)y + 3 = 0$

1 - عين قيمة m حتى يكون (Δ) و (D) متوازيان .

2 - ناقش حسب قيم الوسيط m نقط تقاطع (Δ) و (D) .

تمرين 29 :



إليك التمثيل البياني لدالة f :

أذكر صحة أم خطأ كل جملة مما يلي :

1) $f(0) = 5$

2) القيمة 3 لها سابقتين بالدالة f .

3) للمعادلة : $f(x) = 2$ أربعة حلول .

4) للمعادلة : $f(x) = 1$ أربعة حلول .

5) صورة العدد 5 هي 0 .

6) ليس للدالة f قيمة حدية في المجال $[0, 10]$.

7) العدد 3 هو قيمة حدية كبرى للدالة f في المجال $[2, 5]$.

8) القيمة -2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0, 10]$.

9) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, 10]$.

10) الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0, 2]$.

تمـــريــــن 30 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{a}{x}$ حيث : $a \in \ ^{*}$

1- عين مجموعة تعريف f .

2- عين a حتى يكون : $f(1)=-3$.

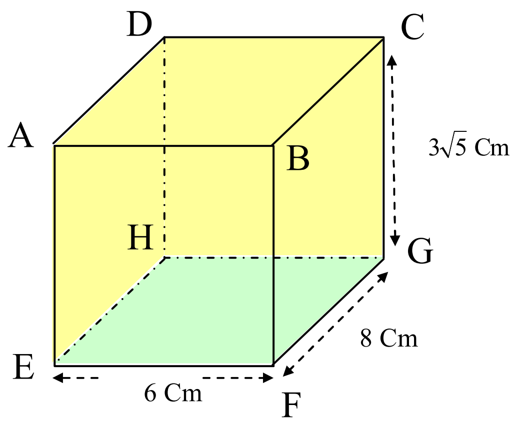
3- اَدرس اتجاه تغير الدالة f من أجل القيمة a المحصل عليها .

4- اَحسب ما يلي :

$f(1)\ ;\ f(3)\ ;\ f(6)\ ;\ f(-1)\ ;\ f(-3)\ ;\ f(-6)$

5- أنشئ المنحني (C) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

تمـــريــــن 31 :



إليك الشكل المقابل :

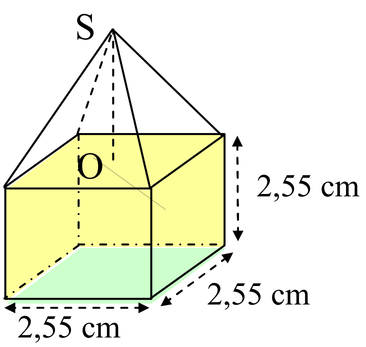
1) احسب المساحة الجانبية للشكل .

2) احسب حجم الشكل .

3) احسب محيط الرباعي AFGD .

تعطى النتائج على شكل قيم مدورة ذات 3 أرقام ذات معنى لها .

تمـــريــــن 32 :



إليك الشكل المقابل :

- احسب حجم هذا الشكل إذا علمت أن : OS = 3,78 Cm

تمـــــريـــــن 33 :

في المستوي (π) نعتبر المثلث ABC القائم في A .

D نقطة لا تنتمي إلى المستوي (π) بحيث يكون المستقيم (D C) عمودي على المستوي (A B C) .

- برهن أن المستقيم (A B) عمودي على المستوي (A D C) .

تمـــــريـــــن 34 :

SABCDهرم . قاعدته على شكل مستطيل طوله $L = 30$ Cm وعرضه $\ell = 20$ Cm .

ارتفاع الهرم $H = 50$ Cm . E نقطة من (SD) بحيث : $\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}$.

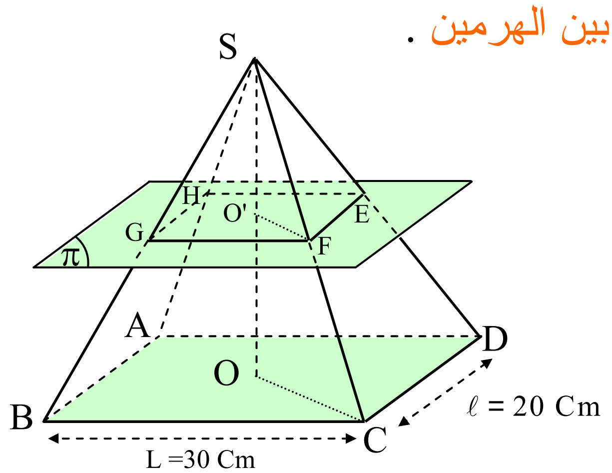
ليكن (π) المستوي الذي يشمل E ويوازي قاعدة الهرم .

(π) يقطع (S A) , (S B) , (S C)في النقطة F , G , H على الترتيب .

1) ما هي طبيعة الشكل SEFGH ؟ احسب حجمه .

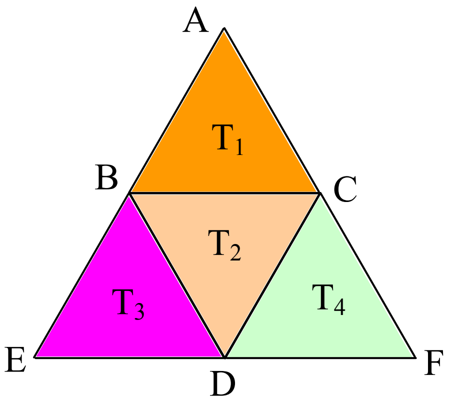
2) احسب حجم الهرم SABCD .

3) احسب حجم الجزء المحصور بين الهرمين .



تـــمــريــــن 35 :

ليكن T_4 , T_3 , T_2 , T_1 أربعة مثلثات متقايسة الأضلاع .



1 – ما هو محور التناظر للتحويل الذي يحول T_1 إلى T_2 .

2 – ما هو شعاع الانسحاب الذي يحول T_1 إلى T_3 .

3 – ما هو مركز التناظر للتحويل الذي يحول T_2 إلى T_4 .

4 – ما هي زاوية الدوران الذي مركزه C ويحول T_1 إلى T_2 .

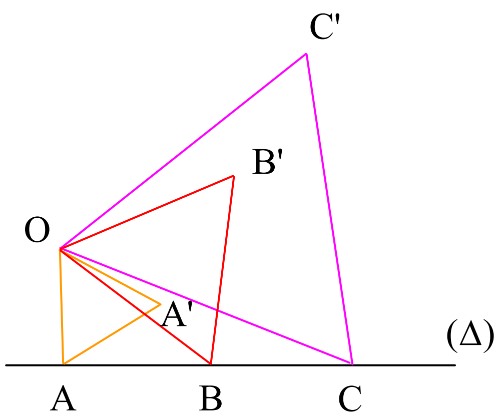
تـــمــريــــن 36 :

(Δ) مستقيم . A , B , C ثلاثة نقط من (Δ) .

O نقطة لا تنتمي إلى (Δ) .

$AOA' ; BOB' ; COC'$ ثلاثة مثلثات متقايسة

الأضلاع كما هو موضح في الشكل .



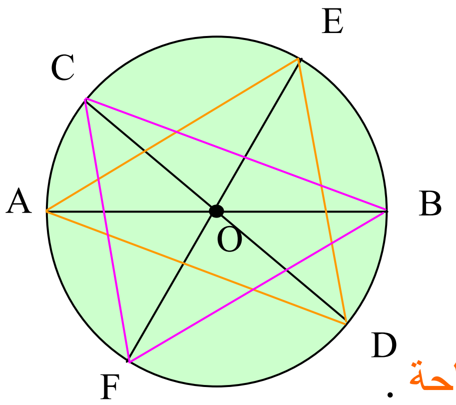
- برهن أن النقط A' , B' , C' على استقامة واحدة .

تـــمــريــــن 37 :

(C) دائرة مركزها O .

$[AB] ; [CD] ; [EF]$ ثلاثة أقطار

للدائرة كما هو موضح في الشكل .



- أثبت أن المثلثين AED و CFB لهما نفس المساحة .

تمرين 38 :

ABCD متوازي أضلاع مركزه O . (Δ) مستقيم يشمل D ويقطع [AC] في M وليكن (Δ') المستقيم الموازي للمستقيم (Δ) ويشمل B فيقطع [AC] في N .

- برهن أن (Δ') هو صورة (Δ) بالتناظر الذي مركزه O .
- برهن أن O منتصف [MN] .

تمرين 39 :

إليك أطوال 40 تلميذاً في أحدى الأقسام :

140 . 150 . 150 . 150 . 155 . 160 . 165 . 160 . 160 . 160 . 170 . 165 . 155.
160 . 165 . 160 . 160 . 175 . 175 . 180 . 180 . 140 . 140 . 150 . 155 . 160 .
170 . 175 . 140 . 160 . 155 . 155 . 160 . 160 . 170 . 170 . 160 . 180 . 175 .
175 . (الأطوال بـ : cm) .

1) اكتب جدولا تبين فيه : التكرار و التواتر.
2) مثل هذه الأطوال بواسطة : الأعمدة البيانية .
3) احسب : المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، المدى لهذه الأطوال

تمرين 40 :

سئل 30 تلميذ ًا على عدد الساعات التي يقضيها كل واحد منهم في المراجعة المنزلية اليومية فكانت كما يلي :

3	1	2	2	1	1	1	1	0,5	0,5
3	0,5	4	4	4,5	5	5	5	1,5	1,5
2	4	4	3,5	3,5	1	0,5	5	5	4

1) يطلب تجميع هـذه القيم في فئـات سعتها 1 و أول هذه الفئات [0 , 1[.

ثم اكتب جدولا إحصائيا تبين فيه التكرار و التواتر و مراكز الفئـات .

2) مثل هـذه القيم بواسطة المدرج التكراري .

3) احسب المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، المدى لهـذه القيم .

تــمـــريــــــن 41 :

وعاء به 100 كرية منها 40 بيضاء و 50 صفراء و 10 خضراء ، نقوم بسحب 30 قريصة على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة إلى الوعاء قبل السحب الموالي .

في السحب الأول تحصلنا على 15 قريصة بيضاء و 12 صفراء و 3 خضراء .

وفي السحب الثاني تحصلنا على 9 قريصات بيضاء و 15 صفراء و 6 خضراء .

نرمز بـ : B إلى الحادثـة « سحب قريصة بيضاء »

J إلى الحادثـة « سحب قريصة صفراء »

V إلى الحادثـة « سحب قريصة خضراء »

1) ما هو التواتر لكل من الحوادث : B ، J ، V في كل من السحبين الأول و الثاني .

2) مثل بيانيـا هـذين التواترين بواسطة الأعمدة على أن تصل بين رؤوس الأعمدة في كل من السحبيـن .

تــمــريـــــن 42 :

إليك قائمة 10 أعداد أعطيت عشوائيا من طرف آلة حاسبة . نقترح استعمال هذه القائمة لمحاكاة 100 رمية لقطعة نقدية .

0,6602753046	0,8937493678
0,0716413187	0,4425142699
0,8592915232	0,5881510402
0,1025053159	0,4195489012
0,4441064248	0,2138811512

نقترح على أن نرفق بكل من الأرقام 0,1,2,3,4 الوجه P و بكل من الأرقام 5,6,7,8 ,9 الوجه F

1) ما هو عدد الأوجه P ؟

2) ما هو عدد الأوجه F ؟

3) ما هو التواتر لكل من P و F ؟ أنشئ بيانيا التواتر لكل منهما .

(الرقم 0 إذا كان على اليمين لا يحسب)

الحلـــول

تــمــريـــــن 01 :

	N	Z	D	Q	R
- 3,2	×	×	- 3,2	- 3,2	- 3,2
$-\frac{6}{3}$	×	$\frac{-6}{3}$	$\frac{-6}{3}$	$\frac{-6}{3}$	$\frac{-6}{3}$
5	5	5	5	5	5
$-\frac{3}{4}$	×	×	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$
$\sqrt{2}$	×	×	×	×	$\sqrt{2}$
$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{16}$
0	0	0	0	0	0
π					π

تــمــريـــــن 02 :

1 - a) $a^{-7}.c^2 = \frac{c^2}{a^7}$; b) $\frac{-a.c}{b^2}$; c) $a^2.b^2 = (ab)^2$

2 - a) $a^{-3}.b^{-4}.c = \frac{c}{a^3 b^4}$; b) $a^3.b^{-2}.c = \frac{a^3.c}{b^2}$

تـــمـــريـــــن 03 :

1) تعيين مقلوب φ :

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

2) * تحقيق $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$:

$$\frac{1}{\varphi}+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}-1+2}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

* تحقيق $\varphi^2=\varphi+1$:

$$\varphi^2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1+2}{2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

إذن : $\varphi^2=\varphi+1$

تـــمـــريـــــن 04 :

1) $DC=\frac{8}{11}+\frac{5}{11}\sqrt{3}$

2) $DE=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

تـــمـــريـــــن 05 :

1) 3×10^{8} ; رتبة المقدار 10^{8}

2) 3×10^{20} ; رتبة المقدار 10^{20}

3) $9,4608\times10^{15}$; رتبة المقدار 10^{15}

ملاحظة : طول السنة الضوئية = سرعة الضوء ×(60 ×60 ×24 ×365)
لأن السنة فيها 365 يوم و اليوم فيه 24 ساعة و الساعة فيها 60 دقيقية
و الدقيقية فيها 60 ثانية .

تـــمـــريـــن 06 :

1- a) $\frac{250}{11} \approx 22{,}7273$; b) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}3541$

c) $43{,}57 \times 0{,}009 \approx 0{,}3921$; d) $\frac{547}{1{,}43} \approx 382{,}5175$

e) $\frac{700}{3\sqrt{2}} \approx 164{,}9916$

2- a) $\frac{5\sqrt{3}-4}{30} \approx 0{,}1553$

b) $\frac{41}{12} - \sqrt{2} \approx 2{,}0025$

c) $\frac{105}{104} - \frac{\sqrt{26}}{5} \approx -0{,}0102$

تـــمـــريـــن 07 :

* $P = \frac{-15^2 \times (345)^5 \times 64 \times (5)^6 \times (49)^2 \times (161)^4}{(23)^5.(1225)^4 \times 480 \times (25)^{-2} \times 15^4 \times (115)^4}$

$P = \frac{-(3\times5)^2 \times (3\times5\times23)^5 \times 2^6 \times 5^6 \times (7^2)^2 \times (7\times23)^4}{(23)^5(5^2\times7^2)^4 \times 2^5 \times 3\times5\times(5^2)^{-2} \times (3\times5)^4 \times (5\times23)^4}$

$P = \frac{-3^2 \times 5^2 \times 3^5 \times 5^5 \times (23)^5 \times 2^6 \times 5^6 \times 7^4 \times 7^4 \times (23)^4}{(23)^5 \times 5^8 \times 7^8 \times 2^5 \times 3\times5\times5^{-4} \times 3^4 \times 5^4 \times 5^4 \times (23)^4}$

$$P = \frac{-2^6 \times 3^7 \times 5^{13} \times 7^8 \times (23)^9}{2^5 \times 3^5 \times 5^{13} \times 7^8 \times (23)^9} = -2 \times 3^2 = -18$$

* $$Q = \frac{60^5 \times 3^{24} \times 5^4 \times 8^6 \times 16^3}{9^5 \times (40)^3 \times (36)^2 \times 6^{10} \times (48)^5 \times (625)^2}$$

$$Q = \frac{2^{10} \times 3^5 \times 5^5 \times 3^{24} \times 5^4 \times 2^{18} \times 2^{12}}{3^{10} \times 2^9 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^4 \times 2^{10} \times 3^{10} \times 2^{20} \times 3^5 \times 5^8} = \frac{\mathbf{2^{40} \times 3^{29} \times 5^9}}{\mathbf{2^{43} \times 3^{29} \times 5^{11}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^3 \times 5^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{200}}$$

* $$R = \frac{3 \times (2 \times 5)^{-4} \times (5^{-8})^2 \times (2 \times 5)^6 \times 2^4 \times (2 \times 5)^{-2} \times 11}{2 \times (2 \times 5)^2 \times 3 \times 10^{-5} \times 2^2 \times 11 \times (2 \times 5)^{-7} \times 5^{-8}}$$

$$R = \frac{3 \times 2^{-4} \times 5^{-4} \times 5^{-16} \times 2^6 \times 5^6 \times 2^4 \times 2^{-2} \times 5^{-2} \times 11}{2 \times 2^2 \times 5^2 \times 3 \times 2^{-5} \times 5^{-5} \times 2^2 \times 11 \times 2^{-7} \times 5^{-7} \times 5^{-8}}$$

$$R = \frac{2^4 \times 3 \times 5^{-16} \times 11}{2^{-7} \times 3 \times 5^{-18} \times 11} = 2^{11} \times 5^2 = 51200$$

تـــمـــريـــــــن 08 :

$$a \times b = 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

بما أن a عدد أولى فإن قيم a هي : 2 ، 3 ، 5 .

$$*a = 2: \quad b = \frac{1200}{2} = 600$$

$$*a = 3: \quad b = \frac{1200}{3} = 400$$

$$*a = 5: \quad b = \frac{1200}{5} = 240$$

تـــمـــريـــــن 09 :

تعيين حصرا للعدد K :

لدينا : $1,3 \le a \le 1,4$ و منه : $1,69 \le a^2 \le 1,96$

و بما أن : $2,5 \le b \le 2,6$ وَ $3,1 \le c \le 3,2$ فإن : $7,75 \le bc \le 8,32$

و منه : $9,44 \le a^2 + bc \le 10,28$

لدينا : $\begin{pmatrix} 8,1 \le d \le 8,2 \\ 3,1 \le c \le 3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(8,1 - 3,2 \le d - c \le 8,2 - 3,1\right)$

و عليه : $4,9 \le d - c \le 5,1$

لدينا : $\begin{pmatrix} 9,44 \le a^2 + bc \le 10,28 \\ 4,9 \le d - c \le 5,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\dfrac{9,44}{5,1} \le \dfrac{a^2 + bc}{d - c} \le \dfrac{10,28}{4,9}\right)$

و عليه : $1,85 \le \dfrac{a^2 + bc}{d - c} \le 2,09$

ومنه : $\sqrt{1,85} \le \sqrt{\dfrac{a^2 + bc}{d - c}} \le \sqrt{2,09}$ إذن : $1,36 \le K \le 1,44$

تـــمـــريـــــن 10 :

1 – مساحة قاعدة البئر : $S = \pi R^2$

لدينا : $\left(4,3 \le R \le 4,4\right) \Rightarrow \left(18,49 \le R^2 \le 19,36\right)$

و منه : $18,49 \times 3,14 \le \pi R^2 \le 19,36 \times 3,15$ إذن : $58,05 \le S \le 60,98$

2 – حجم البئر : $V_1 = S \times H$

لدينا : $58,05 \times 50,9 \le S \times H \le 60,98 \times 50,8$

إذن : $2954,745 \le V_1 \le 3097,784$

3 – حجم الماء : $V_2 = V_1 \times \frac{3}{4}$ لدينا : $2954,745 \times \frac{3}{4} \le V_1 \times \frac{3}{4} \le 3097,784 \times \frac{3}{4}$

و منه : $2216,05875 \le V_2 \le 2323,338$

تــمــريـــن 11 :

1- لدينا : $(2 \le x \le 3) \Rightarrow (4 \le x^2 \le 9)$

ومنه : $\begin{pmatrix} 10 \le 5x \le 15 \\ \text{و} \\ 4 \le x^2 \le 9 \end{pmatrix} \Rightarrow (14 \le x^2 + 5x \le 24)$

إذن : $11 \le x^2 + 5x - 3 \le 21 \; ...(1)$.

لدينا : $(4 \le x^2 \le 9) \Rightarrow (5 \le x^2 + 1 \le 10)...(2)$.

من (1) و (2) ينتج : $\frac{11}{10} \le \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1} \le \frac{21}{5}$ إذن : $1,1 \le f(x) \le 4,2$.

2- لدينا : $(n \le x \le n+1) \Rightarrow (n^2 \le x^2 \le (n+1)^2)$

$$\begin{pmatrix} n^2 \le x^2 \le (n+1)^2 \\ 5n \le 5x \le 5(n+1) \end{pmatrix} \Rightarrow (n^2 + 5n \le x^2 + 5x \le (n+1)^2 + 5(n+1))$$

ومنه : $n^2 + 5n - 3 \le x^2 + 5x - 3 \le (n+1)^2 + 5(n+1) - 3$

$$n^2 + 5n - 3 \le x^2 + 5x - 3 \le n^2 + 7n + 3 \; ... (1)$$

لدينا : $n^2 + 1 \le x^2 + 1 \le (n+1)^2 + 1$

و منه : $n^2 + 1 \le x^2 + 1 \le n^2 + 2n + 2 \; ...(2)$

و عليه : $\frac{n^2 + 5n - 3}{n^2 + 2n + 2} \le \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1} \le \frac{n^2 + 7n + 3}{n^2 + 1}$

و عليه : $\frac{n^2+5n-3}{n^2+2n+2} \leq f(x) \leq \frac{n^2+7n+3}{n^2+1}$.

تــمــريـــــن 12 :

1) إثبات أن المثلثين ABC و ABD متقايسان .

لدينا : * BC = AD (فرضا) * BD = AC (فرضا)

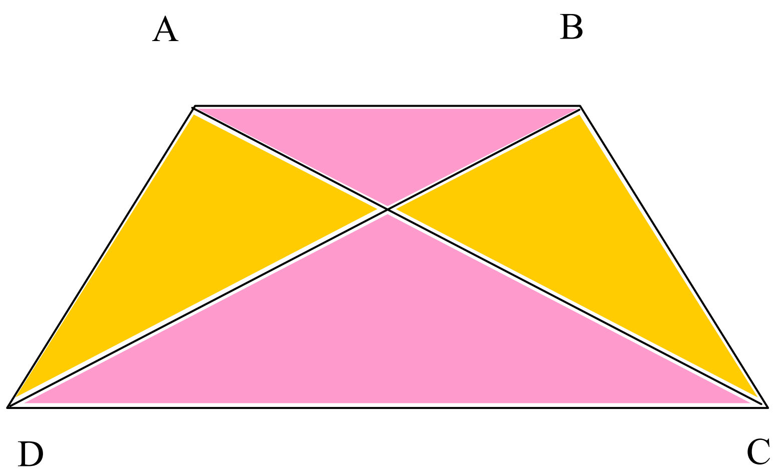
* [AB] (ضلع مشترك)

ومنه : المثلثان ABC و ABD متقايسان .

2) إثبات أن المثلثين ACD و BDC متقايسان.

لدينا : * AC = BD (فرضا) * AD = BC (فرضا) * [DC] (ضلع مشترك)

و منه : المثلثان ACD و BDC متقايسان .



تــمـــريــــن 13 :

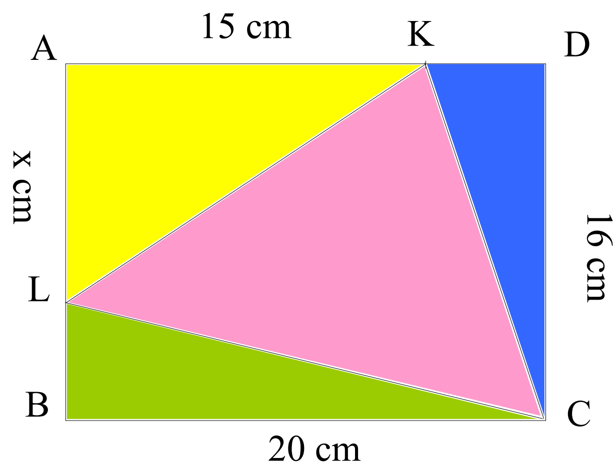
1) الحساب :

* المثلث LBC قائم في B وعليه : $LC^2 = LB^2 + BC^2$

ومنه : $LC^2 = (16 - x)^2 + (20)^2$

$= 256 - 32x + x^2 + 400$

$= 656 - 32x + x^2$



* المثلث KDC قائم في D

وعليه : $KC^2 = KD^2 + DC^2$

$= (5)^2 + (16)^2$

$= 25 + 256 = 281$

* المثلث ALK قائم في A

وعليه : $LK^2 = LA^2 + AK^2 = x^2 + (15)^2 = x^2 + 225$

2) لدينا : $KC = LK$

و منه : $281 = x^2 + 225$ إذن : $x^2 = 56$

و عليه : $x = \sqrt{56}$ و بالتالي : $x = 2\sqrt{14}$.

3) المثلث KCL قائم في K معناه :

$KC^2 + KL^2 = LC^2$

و عليه : $281 + x^2 + 225 = 656 - 32x + x^2$

و منه : $32x = 656 - 281 - 225 = 150$

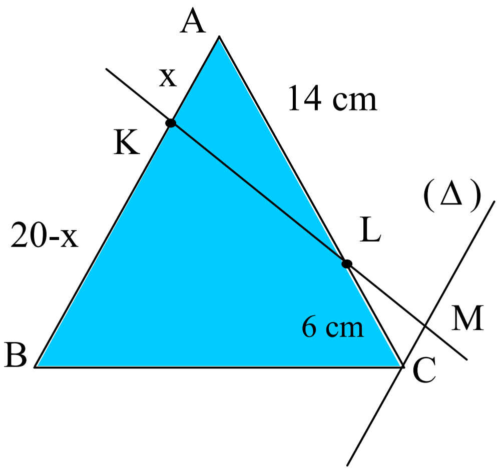
و بالتالي : $x = \frac{150}{32}$ إذن : $x = \frac{75}{16}$.

تـــمـــريـــــــن 14 :

1) تبيان أن : $MC = \frac{3x}{7}$

لدينا : $(AB) // (\Delta)$

وعليه حسب نظرية طاليس $\frac{MC}{AK} = \frac{LC}{LA}$ و بالتالي : $\frac{MC}{x} = \frac{6}{14}$



ومنه : $14\,MC = 6\,x$ وعليه : $MC = \frac{6}{14}x$

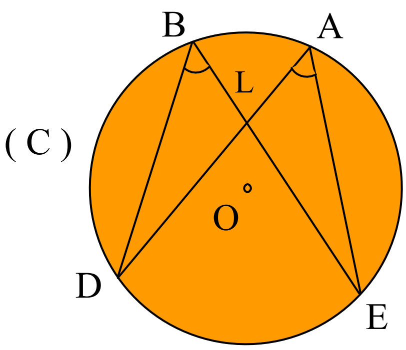
وبالتالي : $MC = \frac{3x}{7}$.

2) تعيين x :

لدينا : $MC = 3$ و عليه : $\frac{3x}{7} = 3$

و منه : $3x = 21$ إذن : $x = 7$.

تـــمـــريـــــــن 15 :



* لدينا : $\widehat{ALE} = \widehat{BLD}$ (بالتقابل بالرأس) .

* و لدينا : $\widehat{EAL} = \widehat{DBL}$

(زاويتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{DE}$) .

و عليه : المثلثان ALE و BLD متشابهان .

تــمــريـــــن 16 :

1- تبسيط العبارة $p(x)$:

$$p(x)=\text{Cos}(x+\pi)+\text{Sin}\,x+\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$p(x)=-\text{Cos}\,x+\text{Sin}\,x+\text{Cos}\,x+\text{Sin}\,x$$

إذن : $p(x)=2\,\text{Sin}\,x$.

2- حل المعادلة : $p(x)=0$

أي : $2\,\text{Sin}\,x=0$ و بالتالي : $\text{Sin}\,x=0$

و حسب الدائرة المثلثية نجد : $(x=k\pi\ ;\ k\in Z)$

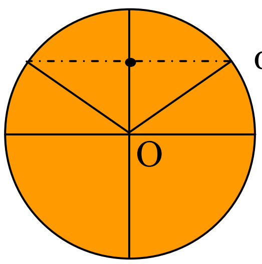
إذن حلول المعادلة هي الأعداد الحقيقية x حيث : $x=k\pi\ ;\ k\in Z$.

3- حل المعادلة : $p(x+2\pi)=p(x)\ldots.(1)$

(1) تعني : $2\,\text{Sin}(x+2\pi)=2\,\text{Sin}(-x)$

و هذا يعني أن : $\text{Sin}(x+2\pi)=\text{Sin}(-x)$

و حسب الدائرة المثلثية نجد :



$$\left(\begin{array}{c} x+2\pi=-x+2k\pi\ ,\ k\in Z \\ \text{أو} \\ x+2\pi=\pi+x+2k\pi\ ,\ k\in Z \end{array}\right)$$

ومنه : $\left(\begin{array}{l} x=-\pi+k\pi\ ,\ k\in Z \\ 0=-\pi+2k\pi\ ,\ k\in Z\ \ (\text{مستحيل}) \end{array}\right)$

إذن حلول المعادلة هي الأعداد الحقيقية x بحيث :

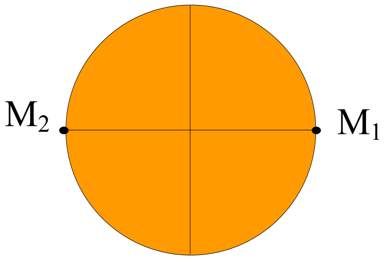
$$x=(k-1)\pi\ ,\ k\in Z$$

- تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية :

من أجل : $k = 0$ لدينا : $x = -\pi$

من أجل : $k = 1$ لدينا : $x = 0$

صورتا الحلين هما النقطتان $M_1(0)$ و $M_2(-\pi)$



تمرين 17 :

يكون Q(x) معرفة إذا وفقط إذا : $\cos^2(\pi + x) - \sin^2(\pi + x) \neq 0$

$$\left[\cos^2(\pi + x) - \sin^2(\pi + x) = 0\right] \Leftrightarrow \left[\cos^2 x - \sin^2 x = 0\right] ...(1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0\right]$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ \cos x = -\sin x \end{cases}$$

و منه حسب الدائرة المثلثية :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi & ; k \in Z \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi & ; k \in Z \end{cases}$$

إذن تكون Q(x) معرفة إذا وفقط إذا :

$$x \neq \frac{\pi}{4} + R\pi \quad , \quad x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi \quad , \quad R \in Z$$

- تبيان أن : $Q(x) = \dfrac{-2\cos x}{2\cos^2 x - 1}$

$$Q(x) = \frac{\cos(\pi + x) - \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)}{\cos^2(\pi + x) - \sin^2(\pi + x)}$$

$$Q(x) = \frac{-\cos x + \sin x - \cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$Q(x)=\frac{-2\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

ومنه : $\boxed{Q(x)=\frac{-2\cos x}{2\cos^2 x-1}}$.

*حل في $[0,2\pi]$ المعادلة : $Q(x)=2$

$$\left(Q(x)=2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{-2\cos x}{2\cos^2 x-1}=2\right)\dots(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow\left(-2\cos x=4\cos^2 x-2\right)$$

$$(1)\Leftrightarrow\left(4\cos^2 x+2\cos x-2=0\right)$$

$$(1)\Leftrightarrow\left(2\cos^2 x+\cos x-1=0\right)$$

حل المعادلة : $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

بوضع : $\cos x=y$ نجد : $2y^2+y-1=0$

إذن : $(y+1)(2y-1)$

وعليه : $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0\ \dots(2)$

إذن :
$$(2)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}\cos x+1=0\\ \text{أو}\\ 2\cos x-1=0\end{array}\right)$$

$$(2)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

ومنه : $(\cos x=-1)\Leftrightarrow(\cos x=\cos\pi)$

$$\left(\cos x=-1\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in Z\\ \text{أو}\\ x=-\pi+2k\pi\ ,\ k\in Z\end{array}\right)$$

$$\left(\cos x=-1\right)\Leftrightarrow\left(x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in Z\right)$$

$$\left(\operatorname{Cos} x = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\operatorname{Cos} x = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in Z \\ \text{أو} \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in Z \end{array}\right)$$

و بما أن $x \in [0, 2\pi]$ فإن : $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \pi$ أو $x = \frac{-\pi}{4}$

وبالتالي الحلول هي : $\pi \ , \ \frac{\pi}{3} \ , \ \frac{-\pi}{3}$.

و هذه الحلول مقبولة لأن $Q(x)$ معرفة عندها .

تــمـــريــــن 18 :

1) ✗ .

2) ✓ .

3) ✗ .

4) ✗ .

5) ✓ .

6) ✓ .

7) ✓ .

تــمـــريــــن 19 :

1) نشر وتبسيط واختصار العبارة : $(a - b)^3$

$$* \ (a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)\left(a^2 - 2ab + b^2\right)$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

و منه : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

2) النشر :

$$* \, (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

و منه : $(a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$.

$$* \, (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

و منه : $(a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3$.

الاستنتاج :

$$* \, a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$* \, a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

3) النشر والاختصار :

$$(a + b + c)^2 = \left[a + (b + c)\right]^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

استنتاج $\left(4x^2 - x + 1\right)^2$:

$$\left(4x^2 - x + 1\right)^2 = \left[4x^2 + (-x) + 1\right]^2$$

$$= \left(4x^2\right)^2 + (-x)^2 + (1)^2 + 2\left(4x^2\right)(-x) + 2\left(4x^2\right)(1) + 2(-x)(1)$$

$$= 16x^4 + x^2 + 1 - 8x^3 + 8x^2 - 2x$$

$\left(4x^2 - x + 1\right)^2 = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 1$.

تمرين 20 :

مساحة ABCD هي : $S_1 = (2x - 1)x = 2x^2 - x$

مساحة ADE هي : $S_2 = \frac{(2x-1)x}{2} = \frac{2x^2 - x}{2}$

مساحة المنزل هي : $S = S_1 + S_2$ و منه : $S = 2x^2 - x + \frac{2x^2 - x}{2} = \frac{4x^2 - 2x + 2x^2 - x}{2}$

ومنه : $S = \frac{6x^2 - 3x}{2}$ ولدينا : $S = 180\ m^2$ وعليه : $\frac{6x^2 - 3x}{2} = 180$

إذن : $6x^2 - 3x = 360$ أي : $6x^2 - 3x - 360 = 0$

بالقسمة على 3 نجد : $2x^2 - x - 120 = 0$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac$ أي : $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-120) = 961$

$\Delta > 0$ و عليه للمعادلة حلين متمايزين :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{961}}{2 \times 2} = \frac{-15}{2}$$ (مرفوض)

و $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{961}}{2 \times 2} = 8$$

وعليه : $x = 8$.

تمرين 21 :

تعيين وضعية M :

* في المثلث القائم ABM لدينا : $AM^2 = AB^2 + BM^2$

ومنه : $AM^2 = 9 + (BC - MC)^2$

إذن : $AM^2 = 9 + (5 - MC)^2$

* و في المثلث القائم DCM لدينا : $DM^2 = DC^2 + MC^2$

ومنه : $DM^2 = 16 + MC^2$

يكون $AM = DM$ إذا وفقط إذا كان : $AM^2 = DM^2$

وهذا يعني أن : $9 + (5 - MC)^2 = 16 + MC^2$

أي : $9 + 25 - 10MC + MC^2 = 16 + MC^2$ ومنه : $MC = \frac{18}{10}$

أي : $MC = 1{,}8\ Cm$. وعليه : $MB = 5 - 1{,}8$ أي : $MB = 3{,}2\ Cm$.

تــــمـــريـــــن 22 :

1) *الحل الجبري* :

نفرض x عرض المستطيل و y طوله و بالتالي $x < y$.

فيكون : $xy = 6$ وَ $2(x + y) = 10$

إذن : $xy = 6$ وَ $x + y = 5$

وعليه : $xy = 6$ وَ $y = 5 - x$

ومنه : $x(5-x) = 6$ وَ $y = 5 - x$

إذن : $-x^2 + 5x - 6 = 0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-1)(-6) = 1$

ومنه للمعادلة حلين هما: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2(-1)} = 3$ وَ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{2(-1)} = 2$

لما $x = 3$ فان : $y = 2$ (مرفوض لأن $x < y$)

لما $x = 2$ فان : $y = 3$

ومنه يوجد مستطيل حيث طوله 3 Cm وَ عرضه 2 Cm .

2) *الحل البياني* :

لدينا : $x\,y = 6$ و $x + y = 5$

ومنه : $y = \frac{6}{x}$ وَ $y = 5 - x$ حيث : $x < y$

لتكن f , g الدالتين المعرفتين كما يلي : $f(x) = \frac{6}{x}$ وَ $g(x) = 5 - x$

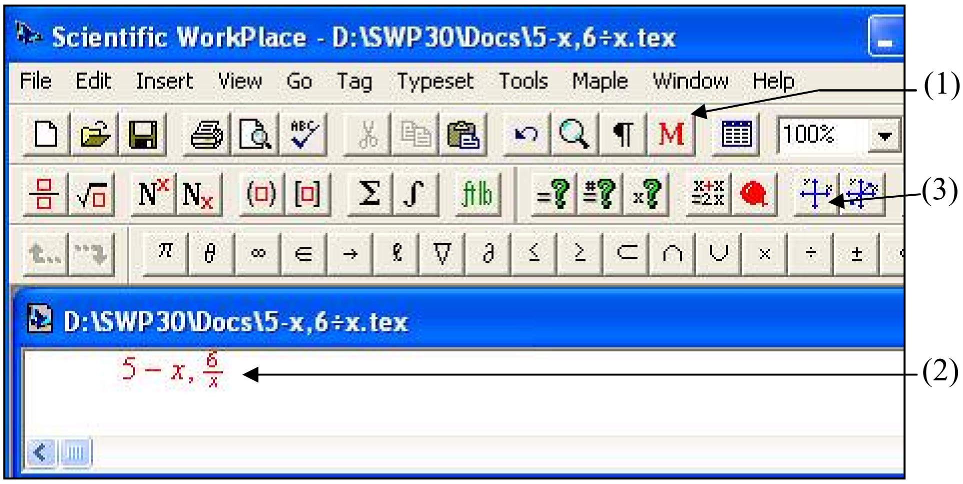
نقوم بإنشاء البيانين (δ) و (c) الممثلين للدالتين f , g باستعمال الحاسبة البيانية أو الحاسوب بتباع الخطوات التالية :

1 / نستعمل اللمسة (1) لتحويل النص من آدبي $\boxed{\text{T}}$ إلى رياضي $\boxed{\text{M}}$.

2 / نكتب عبارة الدالتين في لوحة تحرير النص (2) .

3 / نستعمل اللمسة (3) لتمثيل الدالتين في معلم ثنائي البعدين .

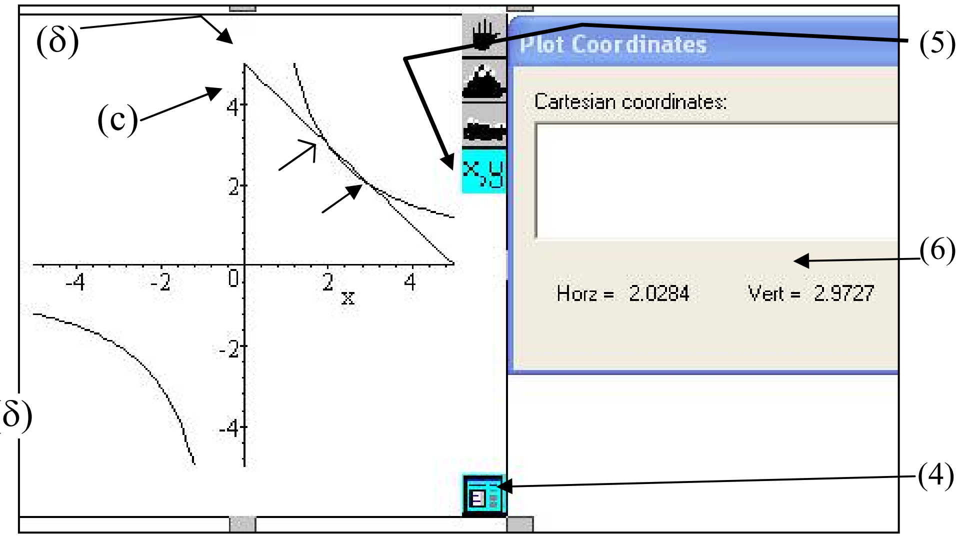
الخطوات السابقة موضحة في الرسم التالي :



4 / نضبط الوحدات و قيم x و كذلك قيم y و هذا باستعمال اللمسة (4) .

5 / نستعمل اللمسة (5) لكي نظهر لوحة (6) التي تعطي إحداثيات أي نقطة من المعلم حيث Horz يمثل x و Vert يمثل y .

الخطوتان الأخيرتان تظهران في الرسم التالي :



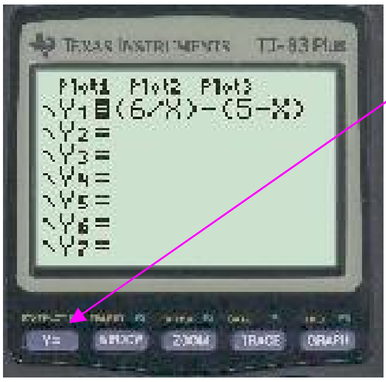
نقطتي تقاطع (δ) و (c) هما النقطتان : $M_1(3\,,2)$ المشار إليها في الشكل بالسهم : ↗

وَ $M_2(2\,,3)$ المشار إليها في الشكل بالسهم : ↗ و هي النقطة التي تظهر إحداثياتها بالتقريب

في اللوحة (6) إذن : $x \quad 2{,}0284$ ، $y \quad 2{,}9727$ ومنه : $x = 2$ و $y = 3$

يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل $\mathbf{y = (6/x) - (5 - x)}$ باتباع الخطوات التالية :

1/ نستعمل الزر Y= و نكتب العبارة $\mathbf{(6/x) - (5 - x)}$

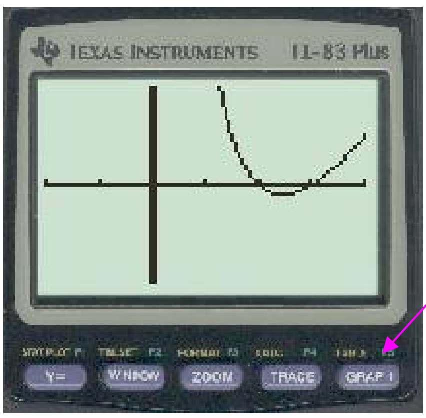


2/ نستعمل الزر WINDOW

لضبط مجال القيم

3/ نستعمل الزر GRAPH

فيظهر المنحني و نلاحظ قيم x هي 2 و 3

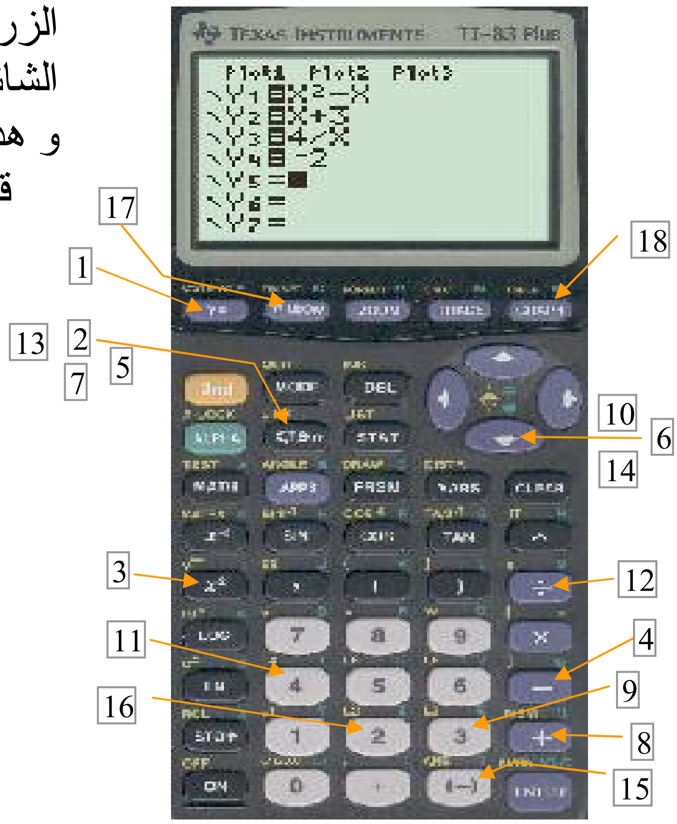


إذن يوجد مستطيل حيث طوله 3 Cm وَ عرضه 2 Cm .

تـــمــــريــــن 23 :

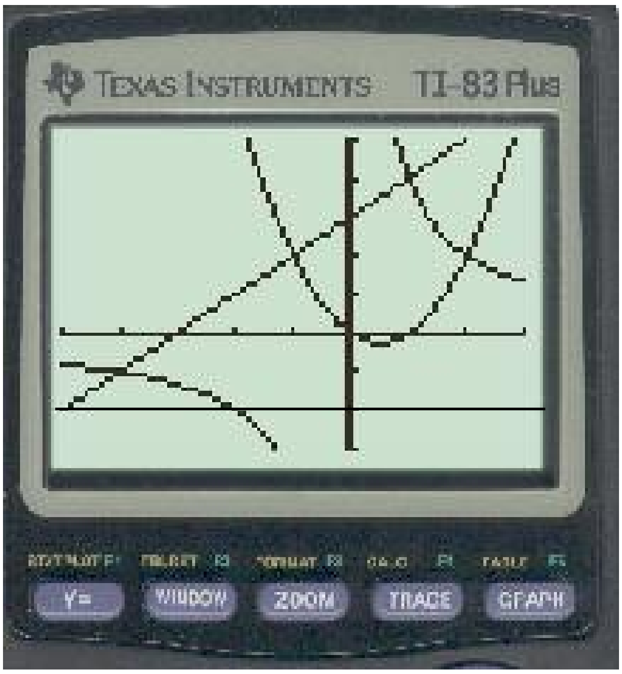
باستعمال آلة بيانية ننشئ التمثيلات البيانية (U_1) ; (U_2) ; (U_3)

للدوال f , g , h على الترتيب حيث : $f(x)=x^2-x$; $h(x)=x+3$; $g(x)=\frac{4}{x}$. نضغط على الأزرار بتباع ترتيب الأرقام التي تشير إليها كما هو في الصورة .

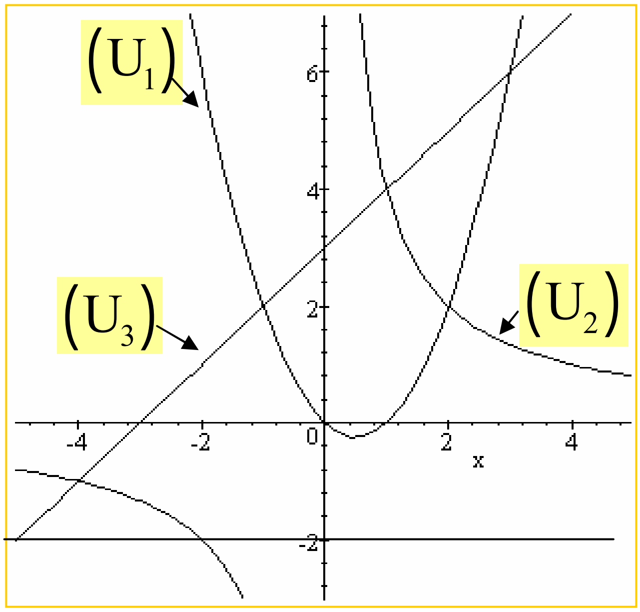


الزر WINDOW المشار إليه بالرقم 17 يظهر على الشاشة ما يلي :
و هذا لضبط مجال قيم x و y

الزر GRAPH المشار إليه بالرقم 18 يظهر على الشاشة ما يلي :



يمكن توضيح الصورة بالرسم التالي :



* حل بيانيا للمعادلة : $f(x) = -2$ ؛ (Δ) مستقيم معادلته : $y = -2$

نلاحظ بيانيا أن : $(U_1) \cap (\Delta) = \phi$ وعليه ليس للمعادلة حلول .

* حل بيانيا المتراجحة : $f(x) > -2$

بيان نلاحظ أن المنحنى (U_1) يقع فوق المستقيم (Δ) وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي :

* الحل الحسابي للمتراجحة : $\frac{4}{x} \leq x + 3$

وهذا يعني أن : $\frac{4}{x} - (x+3) \leq 0$ أي : $\frac{4 - x^2 - 3x}{x} \leq 0$ ومنه : $\frac{-x^2 - 3x + 4}{x} \leq 0$

- نحلل العبارة : $-x^2 - 3x + 4$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1)(4) = 25$

ومنه : $x_2 = \frac{3+5}{-2} = -4$; $x_1 = \frac{3-5}{-2} = 1$

✍ ملاحظة هامة :

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في حالة $a+c=-b$
تقبل حلين هما : 1 و $\frac{c}{a}$.

إذن : $-x^2-3x+4=-(x-1)(x+4)$

وعليه المتراجحة تصبح : $\frac{-(x-1)(x+4)}{x}\leq 0$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-4		0		1	$+\infty$
$-(x-1)$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-(x-1)(x+4)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{-(x-1)(x+4)}{x}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

وعليه حلول المتراجحة : $E_1=[-4,0[\cup[1,+\infty[$

* الحل البياني للمتراجحة : $\frac{4}{x}\leq x+3$ أي : $g(x)\leq h(x)$

و هذا يؤول إلى إيجاد وضعية المنحنى (U_2) و (U_3) .

من خلال البياني نلاحظ أن : (U_2) يقع تحت (U_3) في كل من المجالين :

$]-4,0[$ و $]1,+\infty[$ وعليه $g(x)<h(x)$.

كذلك (U_2) يقطع (U_3) في النقطتين اللتين فاصلتهما -4 ، 1 وعلى مجموعة

حلول المتراجحة $g(x)\leq f(x)$ هي : $E_1=[-4,0[\cup[1,+\infty[$

* الحل الحسابي للمتراجحة : $x+3\geq x^2-x$

وهذا يعني أن : $x+3-x^2+x\geq 0$ أي : $-x^2+2x+3\geq 0$

لدينا : $\Delta=4+12=16$

و منه : $x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$; $x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3$

✍ ملاحظة هامة :

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في حالة $a+c=b$ تقبل حلين هما : -1 و $\frac{-c}{a}$.

وعليه : $-x^2+2x+3 = -(x-3)(x+1)$

و المتراجحة تصبح : $-(x-3)(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-(x-3)$	+		+	0	-
$x+1$	-	0	+		+
$-(x-3)(x+1)$	-	0	+	0	-

جدول الإشارة :

وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي : $E_2 = [-1, 3]$

* الحل البياني للمتراجحة : $x+3 \geq x^2 - x$ أي : $h(x) \geq f(x)$

وهذا يؤول إلى دراسة الوضعية لكل من (U_1) و (U_3) .

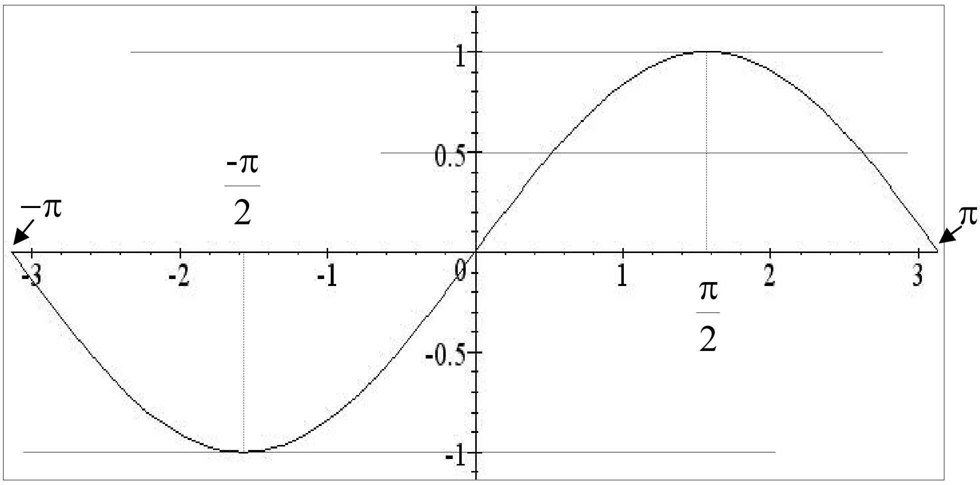
من خلال البياني نلاحظ أن (U_3) يقطع فوق (U_1) في المجال $]-1, 3[$

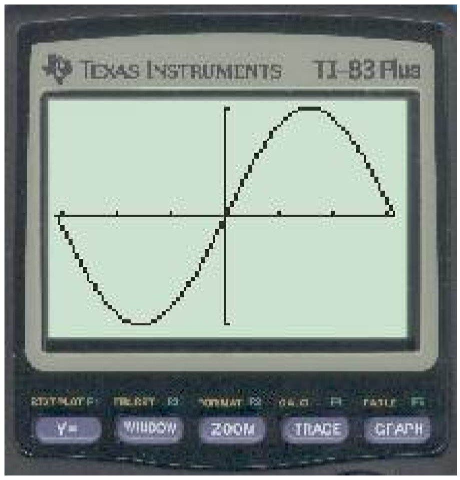
ويقطعه عند النقطتين ذات الفاصلتين 3 ، -1

وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي : $E_2 = [-1, 3]$

تـمـــريـــــن 24 :

التمثيل البياني للدالة f :





نرسم المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$ فنجد .

1) للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول هي : $-\pi , 0 , \pi$

2) للمعادلة $f(x) = 1$ حل مضاعف هو : $\frac{\pi}{2}$

3) للمعادلة $f(x) = -1$ حل مضاعف هو : $\frac{-\pi}{2}$

- استنتاج حلول المتراجحات :

1) حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي قيم x التي تنتمي إلى المجال $[0 , \pi]$.

2) حلول المتراجحة $f(x) \succ 1$ ليس لها حلول .

3) حلول المتراجحة $f(x) \leq 1$: للمتراجحة حل وحيد هو $\frac{-\pi}{2}$

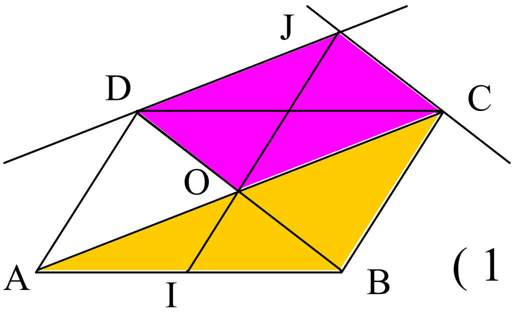
- عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$

نرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = \frac{1}{2}$ فيقطع (c) في نقطتين فاصلتهما x_1 , x_2 حيث :

$x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ إذن : $0,523 \quad x_2$, $2,617 \quad x_1$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $\{x_1 , x_2\}$

تمرين 25 :



إثبات أن : O , I , J على استقامة واحدة :

في المثلث ABC لدينا :

O منتصف $[AC]$ و I منتصف $[AB]$.

وعليه : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ أي : $\overrightarrow{OI} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (1) \ldots$

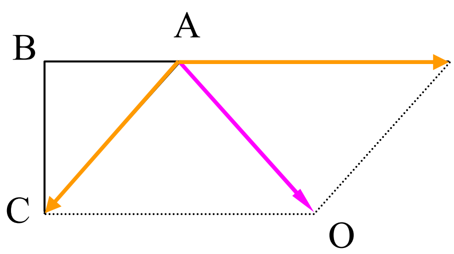
* الرباعي $OCJD$ متوازي الأضلاع وعليه : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

ومنه : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO}$ أي : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

أي : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BC} \quad (2) \ldots$ وبالتالي من (1) و (2) ينتج : $\overrightarrow{OI} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{OJ}$

وعليه $\overrightarrow{OI} // \overrightarrow{OJ}$ ونستنتج أن O , I , J على استقامة واحدة .

تمرين 26 :



1 - نبين أن : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$ شعاع ثابت :

لدينا : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{NA} - 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}$

و منه : $\overrightarrow{V} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و هو شعاع ثابت .

2 - إنشاء النقطة O حيث : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{V}$.

تــمـــريـــــن 27 :

1 - إثبات أن $(O , \vec{U} , \vec{V})$ معلما للمستوي :

لدينا : $\vec{V}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{U} \neq \vec{0}$; $\vec{V} \neq \vec{0}$

من شرط التوازي نجد : $(-2)(-1) - 3\,(4) = 2 - 12 = -10$

ومنه : $\vec{U}$ لا يوازي $\vec{V}$ و بالتالي : $(\vec{U} , \vec{V})$ أساسا للمستوي .

و عليه : $(O , \vec{U} , \vec{V})$ معلما للمستوي .

2 - كتابة x' , y' بدلالة x , y :

لدينا : $\overrightarrow{ON} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ . . . (1) و $\overrightarrow{ON} = x'\,\vec{U} + y'\,\vec{V}$

ومنه : $\overrightarrow{ON} = x'(-2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}) + y'(4\,\vec{i} - \vec{j})$

أي : $\overrightarrow{ON} = (-2\,x' + 4\,y')\,\vec{i} + (3\,x' - y')\,\vec{j}$ . . . (2)

من (1) و (2) نجد : $\begin{cases} x = -2\,x' + 4\,y' \\ y = 3\,x' - y' \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = -2\,x' + 4\,y' \\ y' = 3\,x' - y \end{cases}$

و بالتعويض نجد : $x = -2\,x' + 4\,(3\,x' - y)$ أي : $x + 4\,y = 10\,x'$

إذن : $x' = \frac{1}{10}\,x + \frac{2}{5}\,y$ ومنه : $y' = \frac{3}{10}\,x + \frac{1}{5}\,y$.

3 - البحث عن وجود نقط لها نفس الإحداثيات في المعلمين :

نفرض : $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x = \frac{1}{10}\,x + \frac{2}{5}\,y \\ y = \frac{3}{10}\,x + \frac{1}{5}\,y \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \frac{9}{10}\,x - \frac{2}{5}\,y = 0 \\ \frac{-3}{10}\,x + \frac{4}{5}\,y = 0 \end{cases}$

و هذا يعني أن : $\begin{cases} 9\,x - 4\,y = 0 \\ -3\,x + 8\,y = 0 \end{cases}$ بضرب طرفي المعادلة الثانية في 3 و الجمع مع المعادلة

الأولى طرفا لطرف نجد : $20\,y = 0$ ومنه : $(x , y) = (0 , 0)$

إذن النقطة الوحيدة التي لها نفس الإحداثيات في المعلمين هي : $O(0 , 0)$.

تــمــريـــــن 28 :

1 - تعيين m بحيث يكون (Δ) وَ (D) متوازيان :

حسب شرط التوازي نجد : $m(7m-5)-(m-1)(m+1)=0$

أي : $7m^2-5m-m^2+1=0$ أي : $6m^2-5m+1=0$

لدينا : $\Delta=(-5)^2-4\times6\times1=1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين m_1 , m_2

حيث: $m_2=\frac{5+1}{2\times6}=\frac{1}{2}$, $m_1=\frac{5-1}{2\times6}=\frac{1}{3}$

و منه مجموعة قيم m هي : $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

2 - مناقشة تقاطع (Δ) وَ (D) :

أي نناقش حل الجملة : $\begin{cases} mx+(m-1)y-2=0 \\ (m+1)x+(7m-5)y+3=0 \end{cases}$

لدينا : $d=\begin{vmatrix} m & m-1 \\ m+1 & 7m-5 \end{vmatrix}=m(7m-5)-(m+1)(m-1)$

و منه : $d=6m^2-5m+1$ ومما سبق ينعدم عند $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ و بالتالي :

* لما $m=\frac{1}{3}$: الجملة تكتب : $\begin{cases} x-2y-6=0 \\ 4x-8y+9=0 \end{cases}$

وبضرب المعادلة الأولى في -4 و الجمع مع الثانية نجد : $33=0$ و هذا مستحيل إذن الجملة ليس لها حل و بالتالي : (Δ) وَ (D) منفصلان .

* لما $m=\frac{1}{2}$ الجملة تكتب : $\begin{cases} x-y-4=0 \\ 3x-3y+6=0 \end{cases}$

وبضرب المعادلة الأولى في -3 و الجمع مع الثانية نجد : $18=0$ و هذا

مستحيل إذن الجملة ليس لها حل و بالتالي : (Δ) وَ (D) منفصلان .

* لما $m\neq\frac{1}{3}$ و $m\neq\frac{1}{2}$ فإن الجملة لها حل وحيد (x,y) حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ 7m-5 & 3 \end{vmatrix}}{d}=\frac{17m-13}{6m^2-5m+1}$$ ؛ $$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & m \\ 3 & m+1 \end{vmatrix}}{d}=\frac{-5m-2}{6m^2-5m+1}$$

وبالتالي : $\boxed{(\Delta)\cap(D)=\{L\}}$ حيث : $L\left(\frac{17m-13}{6m^2-5m+1}\ ,\ \frac{-5m-2}{6m^2-5m+1}\right)$

تـــمــريـــــن 29 :

1) ص 2) خ 3) ص 4) ص 5) ص

6) خ 7) ص 8) ص 9) خ 10) ص

تـــمــريـــــن 30 :

لدينا : $f(x)=\frac{a}{x}$

1) مجموعة التعريف : $D=]-\infty\ ,\ 0[\cup]0\ ,\ +\infty[$.

2) تعيين a بحيث : $f(1)=-3$

لدينا : $f(1)=\frac{a}{1}=a$ ومنه : $a=-3$ و بالتالي : $f(x)=\frac{-3}{x}$.

3) دراسة التغيرات :

- من أجل : $x_1\in D\ ,\ x_2\in D$ وَ $x_1\neq x_2$ لدينا :

$$\vartheta=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-3}{x_1}-\frac{-3}{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-3x_2+3x_1}{x_1\times x_2}}{x_1-x_2}=\frac{3}{x_1\times x_2}$$

لما $x_1 > 0$ وَ $x_2 > 0$: $\vartheta > 0$ و منه f متزايدة تماما .

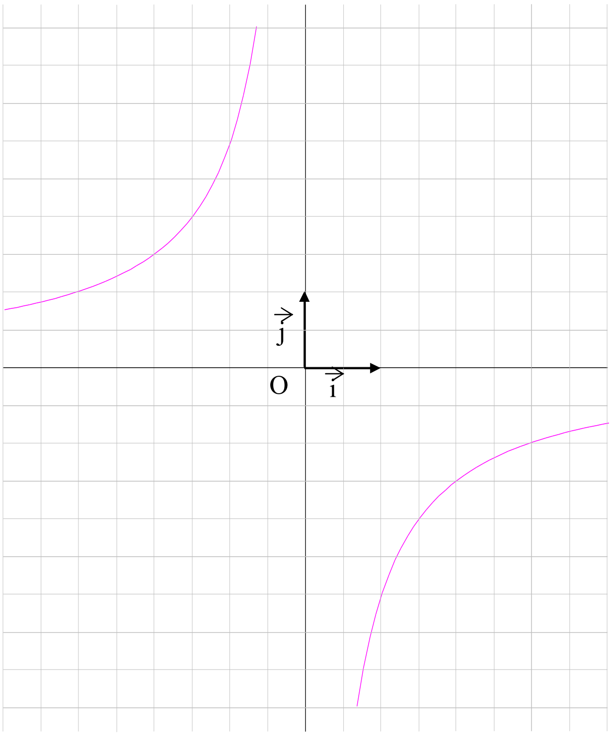
لما $x_1 < 0$ وَ $x_2 < 0$: $\vartheta > 0$ و منه f متزايدة تماما .

▪ جدول التغيرات :

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

4) الحساب : $f(6) = \frac{-1}{2}$; $f(3) = -1$; $f(1) = -3$; $f(-6) = \frac{1}{2}$; $f(-1) = 3$

5) إنشاء البيان :



تـــمـــريـــــن 31 :

1)- مساحة كل من المستطيلين $ABCD$ و $EFGH$ هي :

$A_1 = 8\ Cm \times 6\ Cm$ أي : $A_1 = 48\ Cm^2$.

- مساحة كل من المستطيلين $ADHE$ و $BFGC$ هي :

$A_2 = 6\ Cm \times 3\sqrt{5}\ Cm$ أي : $A_2 = 18\sqrt{5}\ Cm^2$.

- مساحة كل من المستطيلين : $ABFE$ و $DCGH$ هي :

$A_3 = 8\ Cm \times 3\sqrt{5}\ Cm$ أي : $A_3 = 24\sqrt{5}\ Cm^2$.

- المساحة الجانبية للشكل هي : $A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$

أي : $A = \left[2(48) + 2\left(18\sqrt{5}\right) + 2\left(24\sqrt{5}\right)\right] Cm^2$

ومنه : $A = \left[96 + 36\sqrt{5} + 48\sqrt{5}\right] Cm^2 = \left(96 + 84\sqrt{5}\right) Cm^2$

إذن : $A \quad 283,829\ Cm^2$.

2) حجم الشكل هو : $V = \left(8 \times 6 \times 3\sqrt{5}\right) Cm^3$

أي : $V = \left(144\sqrt{5}\right) Cm^3$ إذن : $V \quad 321,993\ Cm^3$.

3) - حساب AF :

في المثلث ABF القائم في B لدينا : $AF^2 = AB^2 + BF^2$

أي : $AF^2 = \left[8^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2\right] Cm^2 = 109\ Cm^2$ إذن : $AF \quad 10,440\ Cm$.

- محيط الرباعي $AFGD$ هو :

$p = 2(AF + FG) = 2(10,44 + 6) Cm$ إذن : $p \quad 32,88\ Cm$.

تـــمـــريــــــن 32 :

- حجم المكعب هو : $V_1 = (2,55\ Cm)^3$ أي : $V_1 = (2,55\ Cm)^3$

إذن : $\boxed{V_1 = 16,58\ Cm^3}$.

- حجم الهرم هو : $V_2 = \dfrac{2,55 \times 2,55 \times 3,78}{3}\ Cm^3$ و منه : $\boxed{V_2 = 8,19\ Cm^3}$.

- حجم الشكل هو : $V = V_1 + V_2$

أي : $V = (16,58 + 8,19)\ Cm^3$ ومنه : $\boxed{V = 24,77\ Cm^3}$.

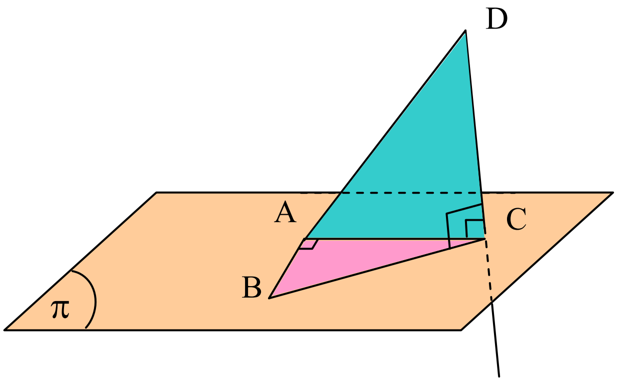
تـــمـــريــــــن 33 :

المثلث ABC قائم في A . وعليه (A B) عمودي على (A C) .

المستقيم (DC) عمودي على المستوي (A B C) وعليه فإن (DC) عمودي على كل مستقيمات هذا المستوي وبالتالي (D C) عمودي على (A C) .

بما أن المستقيم (A B) عمودي على كل من المستقيمين (A C) و (D C) من المستوي (A D C) فإن :

(A B) عمودي على المستوي (A D C) .



تـــمـــريـــــن 34 :

بما أن النقط E , F , G , H تنتمي إلى المستوي (π) الذي يوازي قاعدة الهرم $SABCD$ فإن : $SEFGH$ هو هرم أيضا .

لحساب حجم هذا الهرم فإننا نحسب : FE , GF .

في المثلث SCD لدينا : $\frac{FE}{CD} = \frac{SF}{SC} = \frac{SE}{SD}$

وعليه : $\frac{FE}{20} = \frac{SF}{SC} = \frac{1}{2}$ ومنه : $\boxed{FE = \frac{20 \times 1}{2} = 10\ Cm}$.

في المثلث SBC لدينا : $\frac{SF}{SC} = \frac{GF}{BC} = \frac{SG}{SB}$

وعليه : $\frac{1}{2} = \frac{GF}{30} = \frac{SG}{SB}$ ومنه : $\boxed{GF = \frac{30 \times 1}{2} = 15\ Cm}$.

ليكن : SO ارتفاع الهرم $SABCD$ وَ SO' ارتفاع الهرم $SEFGH$

لدينا في المثلث SOC : $\frac{SF}{SC} = \frac{SO'}{SO}$ وعليه : $\frac{1}{2} = \frac{SO'}{SO}$

ومنه : $\boxed{SO' = 25\ Cm}$.

حجم الهرم $SEFGH$:

لدينا : $V_1 = \frac{1}{3} \times 15 \times 10 \times 25$ أي : $\boxed{V_1 = 1250\ Cm^3}$.

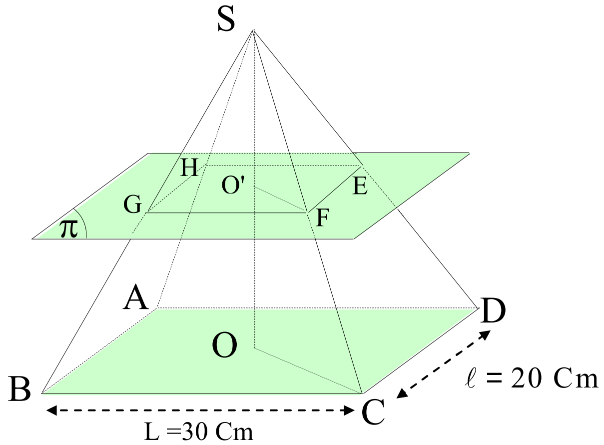
حجم الهرم $SABCD$:

لدينا : $V_2 = \frac{1}{3} \times 30 \times 20 \times 50$

أي : $\boxed{V_2 = 10\ 000\ Cm^3}$.

حجم الجزء المحصور بين الهرمين :

$\boxed{V_3 = V_2 - V_1 = 8750\ Cm^3}$.



تــمــريـــــن 35 :

1) محور تناظر التحويل الذي يحول T_1 إلى T_2 هو (BC) .

2) شعاع الانسحاب الذي يحول T_1 إلى T_3 هو $\overrightarrow{AB}$.

3) مركز التناظر الذي يحول T_2 إلى T_4 هو النقطة O منتصف [CD] .

4) زاوية الدوران هي : $\frac{\pi}{3}$.

تــمــريـــــن 36 :

بما أن المثلثات 'COC' , BOB' , AOA متقايسة الأضلاع فإن زواياها متقايسة وكل منها يساوي 60° .

النقطة 'A هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

النقطة 'B هي صورة B بالدوران r .

النقطة 'C هي صورة C بالدوران r .

وعليه النقط 'A' , B' , C هي صور النقط A , B , C بنفس الدوران r .

وبما أن A , B , C على استقامة واحدة فإن 'A' , B' , C على استقامة واحدة .

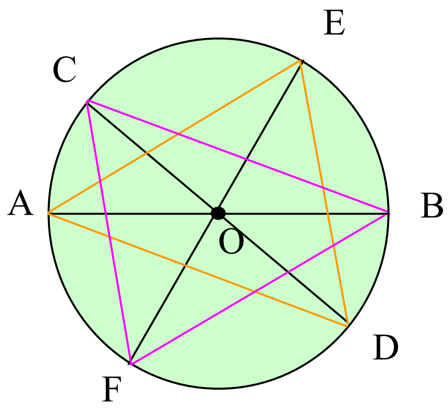
تــمــريـــــن 37 :

لدينا : OA = OB و OC = OD و OE = OF .

وعليه B , C , F هي صور النقط A , D , E بالتناظر الذي مركزه O .

ومنه صورة المثلث AED هي المثلث الذي يقايسه CFB .

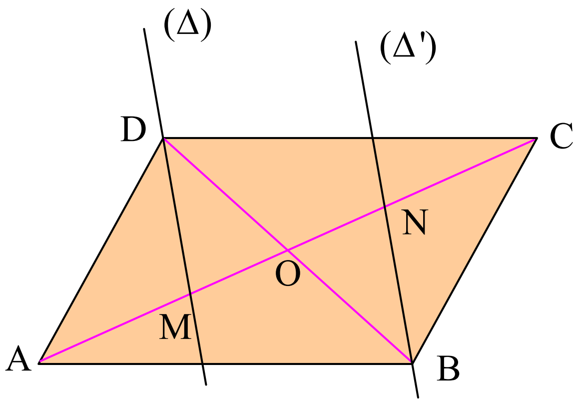
وعليه : مساحة المثلث AED تقايس مساحة المثلث CFB .



تمرين 38 :

ليكن S التناظر الذي مركزه O . B هي صورة D بواسطة S .

المستقيمان (Δ') , (Δ) متوازيان ويشملان D , B على الترتيب .



وعليه (Δ') هو صورة (Δ) بواسطة S .

وكذلك (AC) هو صورة (AC) بواسطة S .

المستقيمان (Δ) و (AC) يتقاطعان في M

والمستقيمان (Δ') و (AC) يتقاطعان في N .

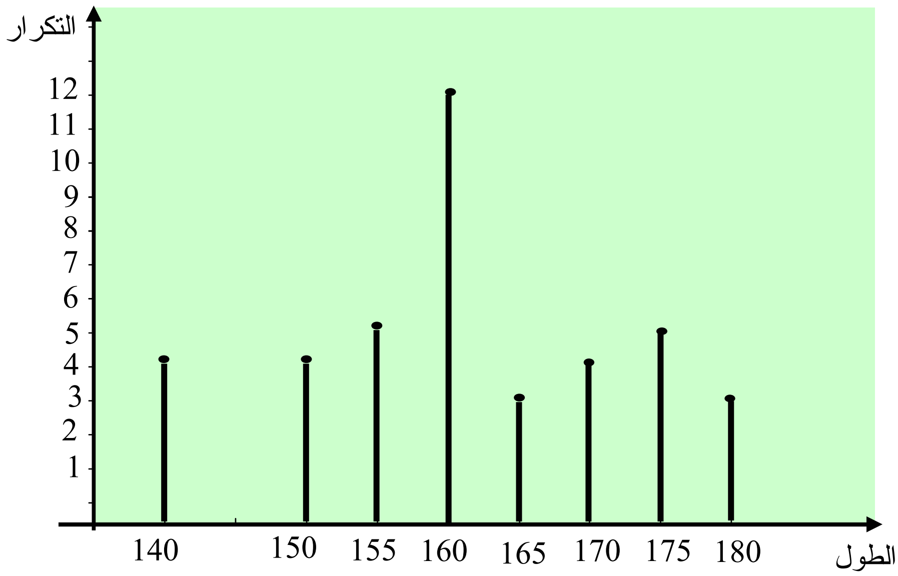
وعليه صورة M بواسطة S هي N .

إذن : OM = ON وعليه : O منتصف [MN] .

تمرين 39 :

1) الجدول الإحصائي

الأطوال Cm	140	150	155	160	165	170	175	180
التكرار	4	4	5	12	3	4	5	3
التواتر	0,1	0,1	0,125	0,3	0,075	0,1	0,125	0,075



3) - <u>المتوسط الحسابي</u> :

$$\overline{x} = \frac{140\times4+150\times4+155\times5+160\times12+165\times3+170\times4+175\times5+180\times3}{40}$$

ومنه : $\boxed{\overline{x}=161,25}$.

- <u>الوسيط</u>: $Med = \frac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ ؛ لدينا : $n = 40$ وعليه : $\frac{n}{2} = 40$

$a_{\frac{n}{2}}$ هو الحد الذي رتبته 20 وهو : 170 . $a_{\frac{n}{2}+1}$ هو الحد الذي رتبته 21 وهو : 170 .

إذن : $\boxed{Med=170}$.

- <u>المنوال</u> : $\boxed{Mod=170}$

- <u>المدى</u> : $E = 180 - 140$ و منه : $E = 40$.

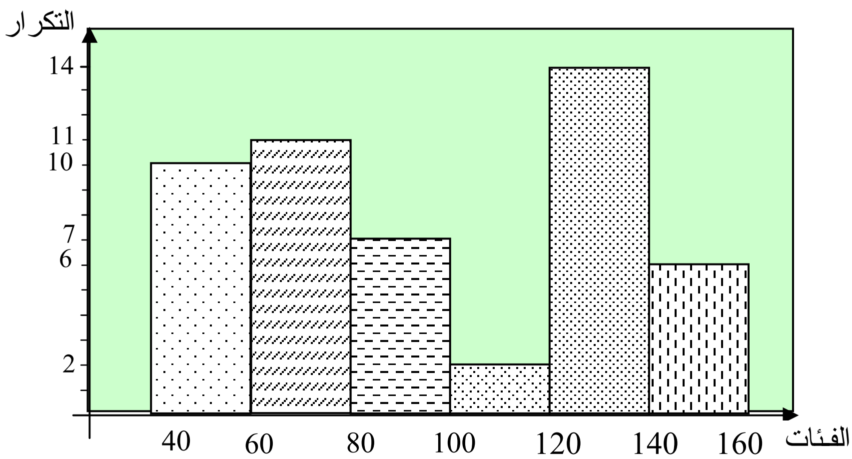
تـــمـــريــــن 40 :

1) <u>الجدول الإحصائي</u> :

الفئات	[40;60[	[60;80[	[80;100[
التكرار	10	11	7
التواتر	0,2	0,22	0,14
مراكز الفئات	50	70	90

الفئات	[100 ;120[	[120 ;140[	[140 ;160[
التكرار	2	14	6
التواتر	0,04	0,28	0,12
مراكز الفئات	110	130	150

2) <u>التمثيل بواسطة المدرج التكراري</u> :



3) - <u>المتوسط الحسابي</u> :

$$\bar{x} = \frac{50\times10 + 70\times11 + 90\times7 + 110\times14 + 150\times16}{100}$$

ومنه : $\bar{x} = \frac{500 + 770 + 630 + 220 + 1820 + 900}{100} = \frac{4840}{50}$ إذن : $\boxed{\bar{x} = 96,8}$.

- الوسيط: $Med = a_i + \dfrac{\frac{n}{2} - s}{E_i} \times h_i$

لدينا : $n = 50$ وعليه : $\frac{n}{2} = 25$ ومنه الفئة الوسيطية هي : $[80 ;100[$ وعليه :

$a_i = 80$, $E_i = 7$, $h_i = 20$, $S = 21$

ومنه : $Med = 80 + \frac{25-21}{7} \times 20$ أي : $\boxed{Med = 91,42}$.

- المنوال : $Mod = a_i + \dfrac{D_1}{D_1 + D_2} \times h_i$

الفئـة المنوالية هـي الفئـة : $[120 ;140[$ و علـيه : $a_i = 120$, $h_i = 140 - 120 = 20$

$D_1 = 14 - 2 = 12$, $D_2 = 14 - 6 = 8$

ومنـه : $Mod = 120 + \frac{12}{12+8} \times 20$ ومنه : $\boxed{Mod = 132}$.

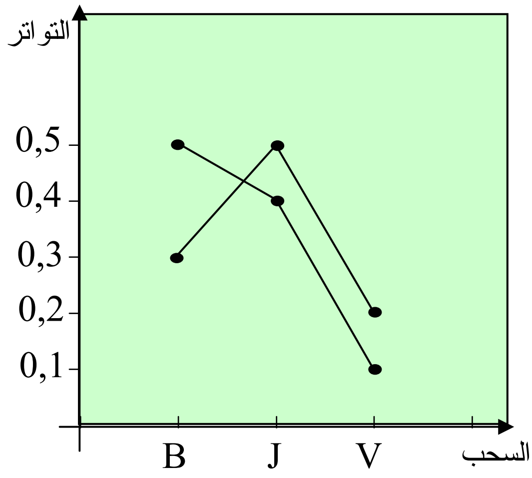
- المدى : $E = 160 - 140$ و منه : $\boxed{E = 12}$.

تـمـريـــن 41 :

السحب 1	B	J	V
التكرار	15	12	3
التـواتـر	0,5	0,4	0,1
السحب 2	B	J	V
التكرار	9	15	6

التـواتـر	0,3	0,5	0,2

التـمـثـيل البـيـاني :



تــمـــريـــــن 42 :

التـواتــر	عـدد الأوجـه	
0,58	58	P
0,42	42	F

- الإنشاء البيانــي :