القضية	نمط البرهان
1) من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ نضع : $A=\dfrac{3x-3}{\lvert x-1\rvert}$ برهن أن : $A\in\mathbb{Z}$	البرهان بفصل الحالات
2) $x\in\mathbb{R}$ برهن أن : $x^2-2x+1=2x-3\Rightarrow x=2$	البرهان بالاستلزام
3) $x\in\mathbb{R}$ ؛ برهن أن : $x\neq 1\Rightarrow (x+1)^2-(x-3)^2\neq 0$	البرهان بالعكس النقيض
4) برهن أن القضية التالية خاطئة : $\forall x\in\mathbb{R}^*: x\prec 1\Rightarrow \dfrac{1}{x}\succ 1$	البرهان بمثال مضاد
5) $x\in\mathbb{N}$: برهن أنه إذا كان x^2 عدد زوجي فإن x عدد زوجي .	البرهان بالخلف
6) $n\in\mathbb{N}$: برهن أن $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .	البرهان بالتراجع

1) من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ نضع : $A=\dfrac{3x-3}{\lvert x-1\rvert}$ برهن أن : $A\in\mathbb{Z}$ **(البرهان بفصل الحالات)**

نلاحظ أن كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فهو يحقق إحدى الحالتين : إما $x\succ 1$ وإما $x\prec 1$

وعلى هذا الأساس نميز الحالتين (المنفصلتين)

الحالة الأولى : من أجل $x\succ 1$

لدينا $\dfrac{3x-3}{x-1}=\dfrac{3(x-1)}{x-1}=3\in\mathbb{Z}.....(1)$

الحالة الثانية : من أجل $x\prec 1$

لدينا $\dfrac{3x-3}{\lvert x-1\rvert}=\dfrac{-3(1-x)}{1-x}=-3\in\mathbb{Z}.....(2)$

من (1) و(2) نستنتج أن $A\in\mathbb{Z}$

2) $x\in\mathbb{R}$ **برهن أن :** $x^2-2x+1=2x-3\Rightarrow x=2$ **(البرهان بالاستلزام – البرهان المباشر)**

لدينا $x^2-2x+1=2x-3$ تكافيء $x^2-4x+4=0$ تكافيء $(x-2)^2=0$ ومنه $x=2$

ومنه $x^2-2x+1=2x-3\Rightarrow x=2$

3) $x\in\mathbb{R}$ ؛ برهن أن : $x\neq 1\Rightarrow (x+1)^2-(x-3)^2\neq 0$ **(البرهان بالعكس النقيض)**

P و Q قضيتان ؛ لإثبات أن $P\Rightarrow Q$ يكفي إثبات أن $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$

وحسب هذا المبدأ ولإثبات $\underbrace{(x+1)^2-(x-3)^2\neq 0}_{Q}$ يكفي إثبات أن : $\underbrace{x\neq 1}_{P}\Rightarrow$

$(x+1)^2-(x-3)^2=0\Rightarrow x=1$

لدينا $(x+1)^2-(x-3)^2=0$ تكافيء $8x-8=0$ ومنه $x=1$

ومنه نستنتج أن : $x\neq 1\Rightarrow (x+1)^2-(x-3)^2\neq 0$

4) برهن أن القضية التالية خاطئة : $\forall x\in\mathbb{R}^*: x\prec 1\Rightarrow \frac{1}{x}\succ 1$ **(البرهان باستعمال المثال المضاد)**

لإثبات أن هذه القضية خاطئة يكفي إيجاد عدد حقيقي غير معدوم x_0 لايحقق الاستلزام .

أي يكفي إثبات أن نفي القضية السابقة صحيح .

أي نثبت أن : $\exists x_0\in\mathbb{R}^*:(x_0\prec 1)\wedge\left(\frac{1}{x_0}\leq 1\right)$

نعلم أن كل عدد سالب فإن مقلوبه هو عدد سالب أيضا وبالتالي أقل من 1 .

نأخذ مثلا $x_0=-2$ ومنه تحقق المطلوب .

5) $x\in\mathbb{N}$: برهن أنه إذا كان x^2 عدد زوجي فإن x عدد زوجي **(البرهان بالخلف)**

x^2 عدد زوجي معناه $x^2=2k\ /k\in\mathbb{N}$

نفرض أن x عدد فردي ومنه $x=2k'+1\ /k'\in\mathbb{N}$ ومنه $x^2=(2k'+1)^2$ ومنه $x^2=4k'^2+4k'+1$

ومنه $x^2=2\left(2k'^2+2k'\right)+1$ ومنه $x^2=2k+1$ ومنه x^2 عدد فردي (تناقض مع المعطيات)

6) $n\in\mathbb{N}$: برهن أن $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 **(البرهان بالتراجع)**

نضع $2^{3n}-1\equiv 0[7].....p(n)$

- من أجل $n=0$: لدينا $2^{3(0)}-1=0\equiv 0[7]$ ومنه $p(0)$ صحيحة .
- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونثبت أن $p(n+1)$ صحيحة .

أي نفرض أن $2^{3n}-1\equiv 0[7]$ ونبرهن أن $2^{3(n+1)}-1\equiv 0[7]$

لدينا $2^{3(n+1)}-1=8\times 2^{3n}-1$ ومنه $2^{3(n+1)}-1=8\times 2^{3n}-8+7$ تكافيء $2^{3(n+1)}-1=8\left(2^{3n}-1\right)+7$

لكن $2^{3n}-1\equiv 0[7]$ وعليه $2^{3n}-1\equiv 7k\ /k\in\mathbb{N}$

ومنه $2^{3(n+1)}-1=8(7k)+7$ تكافيء $2^{3(n+1)}-1=7(8k+1)$ ومنه $2^{3(n+1)}-1\equiv 0[7]$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة (2).....

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $2^{3n}-1\equiv 0[7]$