التمرين الأول :

1/ إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$: نسمي $p(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ "

المرحلة الأولى : من أجل $n = 0$, $u_0 = e$ و $e > 1$, إذن الخاصية $p(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ ونثبت صحة الخاصية $p(n+1)$ أي من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > 1$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ ومنه $\sqrt{u_n} \succ 1$ أي : $U_{n+1} > 1$ وبالتالي الخاصية $p(n+1)$ صحيحة

نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$

2/ من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n = \sqrt{U_n}(1 - \sqrt{U_n})$ و بما أن $U_n > 1$ فإن $1 - \sqrt{U_n} < 0$

وبالتالي $U_{n+1} - U_n < 0$ أي أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

بماأن المتتالية (U_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة

3/ أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln\sqrt{U_n} = \ln(U_n^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(U_n) = \frac{1}{2}V_n$, إذن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = \ln(e) = 1$

ب/ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = \frac{1}{2^n}$, من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n = e^{v_n} = e^{\frac{1}{2^n}}$

جـ/ $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(e^{\frac{1}{2^n}}\right) = 1$

د / من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

$$\begin{aligned} p_n &= e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots\dots\times e^{v_{n-1}} \\ &= e^{v_0+v_1+\dots\dots+v_{n-1}} \\ &= e^{s_n} \\ &= e^{2-\frac{1}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

التمرين الثاني :

1/ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$ تكافىء $(x-2)^2 - 4 + y^2 + (z+1)^2 - 1 + 1 = 0$

تكافىء $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ ، (S) سطح كرة مركزها $\Omega(2,0,-1)$ ونصف قطرها $r = 2$

2/أ) $\overrightarrow{AB}(5;2;-4)$, $\overrightarrow{AC}(3;2;-2)$ ، لا يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ إذن النقط A , B و C ليست في إستقامية

ب) ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) وبالتالي : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ ، مركبات الشعاع $\vec{n}$ هي حل للجملة :

$\begin{cases} 5a+2b-4c=0 \\ 3a+2b-2c=0 \end{cases}$, نأخذ $a = 1$ فيكون : $b = -\frac{1}{2}$ و $c = 1$ أي $\vec{n}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من (p) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ أي $x + 2 - \frac{1}{2}y + z = 0$ أي : $\boxed{2x - y + 2z + 4 = 0}$

ج) بماأن (D) عمودي على (p) فإن الشعاع $\vec{n}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) : $M(x;y;z)$ نقطة من (D) يعني: $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$

(حيث t عدد حقيقي) ومنه $\begin{cases} x-2 = t \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z-1 = t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z = t+1 \end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

3) $d(\Omega, p) = 2$, بما أن $d(\Omega, p) = r$ فإن المستوي (p) مماس لسطح الكرة (S)

تعيين إحداثيات النقطة H نقطة التماس بين المستوى (p) و سطح الكرة (S) :

النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P) و H تنتمي إلى المستقيم (D) إذن إحداثياها $(x;y;z)$ حيث $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z = t+1 \end{cases}$

$H \in (P)$ يعني : $2(t+2) - \left(-\frac{1}{2}t\right) + 2(t+1) + 4 = 0$ ومنه : $t = -\frac{4}{3}$ وبالتالي : $H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$

التمرين الثالث :

I / 1/ (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ ؛ $2^3 + 2\times 2^2 - 16 = 16 - 16 = 0$, إذن العدد 2 حل للمعادلة (E)

تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ ، $b = 4$ ، $c = 8$ ومنه : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + 4z + 8)$

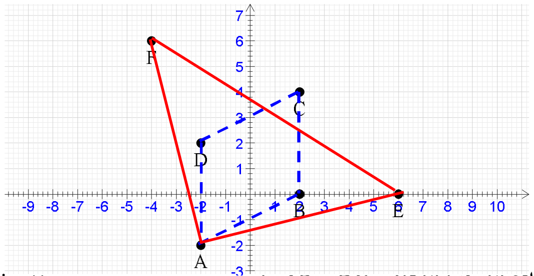
2/ $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ تكافىء $(z-2)(z^2+4z+8) = 0$ تكافىء $z = 2$ أو $(z^2+4z+8) = 0$

Δ' المميز المختصر للمعادلة $(z^2+4z+8) = 0$ حيث : $\Delta' = -4 = (2i)^2$ ؛ $z_1 = -2-2i$ و $z_2 = -2+2i$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $s = \{2, -2-2i, -2+2i\}$

$z_0 = 2 = 2[\cos(0) + i\sin(0)]$ ، $z_1 = -2-2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$ ، $Z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

II / 1) أ)



ب) $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان : $AB = DC$ أي : $z_B - z_A = z_c - z_D$ ومنه : $z_c = z_B - z_A + z_D = 2 + 4i$

3/ E صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي $z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$ أي $z_E - z_B = -i(z_c - z_B)$

ومنه $z_C = -i(z_C - z_B) + z_B = -i(2 + 4i - 2) + 2 = 6$, وبنفس الطريقة نجد : $z_F = -4 + 6i$

4/ أ) $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-1+4i}{4+i} = \frac{17i}{17} = i$

ب) لدينا : $\left|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = |i| = 1$ ومنه $|z_F - z_A| = |z_E - z_A|$ أي $AF = AE$ و لدينا أيضا $arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث AEF قائم في A و متساوي الساقين

التمرين الرابع :

$f(x) = \frac{4x^3}{(2x-1)^2}$

1/ دراسة تغيرات الدالة f : $D_f = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2}\right) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2}\right) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

إتجاه التغير: الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ و $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ حيث : $f'(x) = \frac{4x^2(4x^2 - 8x + 3)}{(2x-1)^4}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{8}$	↗	$+\infty$

2/ حساب العددين a و b : من أجل كل x من D_f : $f(x) = x+1+\dfrac{ax+b}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^3+(a-3)x+b+1}{(2x-1)^2}$

بالمطابقة نجد : $a=3$ و $b=-1$ ومنه $f(x) = x+1+\dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}$

3/ بما أن $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{1}{2}$ مقارب للمنحني (C)

وبماأن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}\right] = 0$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C)

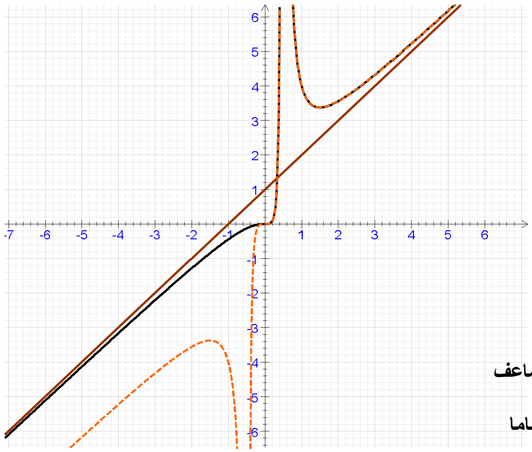
دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : $\left[f(x)-(x+1)\right] = \dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}$

من أجل $x=\dfrac{1}{3}$ فإن : $(C)\cap(\Delta)=\left\{A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$ ، و من أجل $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$ فإن المنحني (C) يقع تحت المستقيم (Δ)

و من أجل $x\in\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم (Δ)

4/ معادلة للمماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 من الشكل : $y=0$

/ رسم كل من (T) و (C) :



6/ $-4x^3+4mx^2-4mx+m=0$ تكافىء

$m=\dfrac{4x^3}{(2x-1)^2}$ أي $f(x)=m$ .... (I)

المناقشة البيانية :

من أجل $m\in\left]-\infty;0\right[$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا واحدا سالبا تماما

من أجل $m=0$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا مضاعفا معدوما

من أجل $m\in\left]0;\dfrac{27}{8}\right[$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا واحدا موجبا تماما

من أجل $m=\dfrac{27}{8}$ فإن المعادلة (I) تقبل حلين موجبين تماما أحدهما مضاعف

من أجل $m\in\left]\dfrac{27}{8};+\infty\right[$ فإن المعادلة (I) تقبل ثلاثة حلول موجبة تماما

7/ $g(x)=\dfrac{4x^3}{(2|x|-1)^2}$ ، $D_g=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

إثبات أن الدالة g فردية :

من أجل كل x من D_g, (- x) ينتمي إلى D_g و $g(-x)=\dfrac{4(-x)^3}{(2|-x|-1)^2} = -\dfrac{4x^3}{(2|x|-1)^2} = -g(x)$ إذ ن الدالة g فردية.

من أجل $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $g(x)=f(x)$ وبالتالي المنحني (Γ) منطبق على المنحني (C)

وبما أن الدالة g فردية فإن المنحني (Γ) متناظر بالنسبة إلى المبدأ O .