تصحيح الإمتحان الثاني في مادة الرياضيات — المستوى : نهائي

التمرين الأول : (05ن)

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}, b_0=7, a_0=1 \quad ,\ n\in\mathbb{N} \text{ حيث}$$

1- $n\in\mathbb{N}$ من أجل كل , $u_n=b_n-a_n$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{1}{3}(a_n+2b_n-2a_n-b_n)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)=\frac{1}{3}u_n$ ..0.5

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول : $u_0=b_0-a_0=7-1=6$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ...2*0.5

2- المقارنة بين a_n و b_n :

لدينا $u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $u_n=b_n-a_n=$ و بما أن $6\left(\frac{1}{3}\right)^n\succ 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $b_n-a_n\succ 0$ أي : $b_n\succ a_n$ 0.5

إتجاه تغير المتتالية (a_n) : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=\frac{1}{3}(b_n-a_n)$

بمأن $b_n\succ a_n$ فإن $\frac{1}{3}(b_n-a_n)\succ 0$ ومنه $a_{n+1}-a_n\succ 0$ و بالتالي المتتالية (a_n) متزايدة 0.5

إتجاه تغير المتتالية (b_n) : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-b_n=\frac{1}{3}(a_n-b_n)$

بمأن $b_n\succ a_n$ فإن $\frac{1}{3}(a_n-b_n)\prec 0$ ومنه $b_{n+1}-b_n\prec 0$ و بالتالي المتتالية (b_n) متناقصة 0.5

3- إثبات أن المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان :

المتتالية (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة و $\lim_{x\to+\infty} u_n=\lim_{x\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{x\to+\infty}\left[6\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=0$,

إذن المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان 0.5

4- من أجل كل $n\in\mathbb{N}$, $v_n=a_n+b_n$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)+\frac{1}{3}(a_n+2b_n)=0$

إذن المتتالية (v_n) ثابتة . أي : $v_n=v_0=8$ 0.5

5- بما أن المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان فإنهما تؤلان إلى نفس النهاية وبالتالي فهما متقاربتان

و لدينا $\begin{cases} b_n-a_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n+b_n=8 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2b_n=8+6\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n+b_n=8 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} b_n=4+3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n=8-b_n \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} b_n=4+3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n=4-3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$

إذن $\begin{cases} b_n=4+\frac{1}{3^{n-1}} \\ a_n=4-\frac{1}{3^{n-1}} \end{cases}$ ، و يكون $\lim_{x\to+\infty} a_n=\lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=4$ و $\lim_{x\to+\infty} b_n=\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=4$ 01

التمرين الثاني : (05ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ ، $C(3,2,4)$

1/ إثبات أن النقط A ، B و C ليست في إستقامية :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5,-2,4)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ ، لا يوجد أي عدد حقيقي k حيث : $\overrightarrow{AC}=k\ \overrightarrow{AB}$

إذن النقط A ، B و C ليست في إستقامية 0.5

2/ (d) مستقيم ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ حيث $\vec{u}(2,-3,1)$ شعاع توجيه له .

* **إثبات أن (d) عمودي على المستوى (ABC) :**

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$

$\vec{u}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذن (d) عمودي على المستوي (ABC) 01

* **إيجاد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) :**

لدينا المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) إذن $\vec{u}(2,-3,1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) وبالتالي المعادلة:

(ABC) هي معادلة لـ $2x-3y+z+d=0$

و لدينا $A\in(ABC)$ يعني : $2\times2-3\times1+3+d=0$ ومنه $d=-4$

إذن معادلة (ABC) من الشكل : $2x-3y+z-4=0$ 01

3/ H نقطة تقاطع المستقيم (d) و المستوى (ABC)

إثبات أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

لدينا من جهة : النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$ يعني أن :

$$x_G=\frac{-2\times2-1\times(-3)+2\times3}{-1}=-5\ ,\ y_G=\frac{-2\times1-1\times(-1)+2\times2}{-1}=-3 \text{ و } z_G=\frac{-2\times3-1\times7+2\times4}{-1}=5$$

إذن $G(-5,-3,5)$

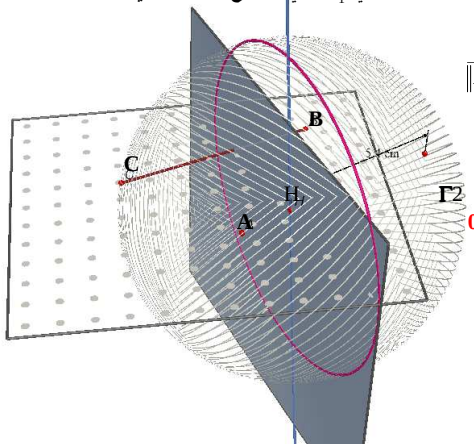
و من جهة أخرى : $H\in(d)\cap(ABC)$ يعني أن : $2(-7+2t)-3(-3t)+4+t-4=0$ ومنه $14t=14$ أي أن $\boxed{t=1}$

و بالتعويض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) نجد : $\boxed{x=-5\ ,\ y=-3\ ,\ z=5}$

إذن النقطة H و G منطبقتان أي H مرجح الجملة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$ 01

* **طبيعة Γ_1 :** لدينا $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM}$ و $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$

إذن : $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ يكافئ $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB}=0$ وبالتالي Γ_1 هي مجموع نقط المستوي المار بـ H و العمودي على (BC)



طبيعة Γ_2 : $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ يكافئ $\|\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{29}$

وبالتالي Γ_2 هي سطح كرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$ 0.5

* **طبيعة تقاطع Γ_1 و Γ_2 :**

لدينا : $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB}=0$ يعني أن:

Γ_1 وهي المعادلة الديكارتية للمستوي $-2x-y+z-18=0$ ..0.5

$$d(H,\Gamma_1)=\frac{|-2\times(-5)+3+5-18|}{\sqrt{6}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0 \text{ و}$$

إذن تقاطع Γ_1 و Γ_2 هو دائرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$ 0.5

Γ1

المسألة : (10 ن)

الجزء الأول :

$g(x)=x^2-2\ln(x)$ ، $D_g=]0,+\infty[$

1/ دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(x-\frac{2\ln(x)}{x}\right)\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$ ..... 0.25+0.25

إتجاه التغير : الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ حيث : $g(x)=2x-2\times\frac{1}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ 0.5

x	0	1	+∞
إشارة g'(x)	−	0	+

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	+∞
g'(x)	−	0	+
g(x)	+∞ ↘	1	↗ +∞

0.5.....

2/ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أنه : من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ ، $g(x)\geq 0$ 0.5

الجزء الثاني :

1/ $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln(x)}{x}$ ، $D_f=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x}{2}+\frac{1+\ln(x)}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+1+\ln(x)\right)\right]=-\infty$

. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقلرب للمنحنى (C) ..... 0.25+0.25

2/ أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2}+\frac{1+\ln(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right]=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\ln(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=\frac{x}{2}$ مستقيم مقلرب للمنحنى (C) ..0.5

جـ) إحداثيي النقطة A نقطة تقاطع (C) مع (Δ) هما حل الجملة : $\begin{cases} y=\frac{x}{2} \\ y=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln(x)}{x}\end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} y=\frac{x}{2} \\ y=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln(x)}{x}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=\frac{x}{2} \\ \frac{1+\ln(x)}{x}=0\end{cases}$ أي أن $\begin{cases} y=\frac{1}{2e} \\ x=\frac{1}{e} \text{ و } x\neq 0\end{cases}$ ، إذن $(C)\cap(\Delta)=\left\{A\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right\}$ 0.5

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) : $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\frac{1+\ln(x)}{x}$

x	0	$\frac{1}{e}$	+∞
$f(x)-\frac{x}{2}$	−	0	+

من أجل كل $x\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$ ، (C) يقع تحت المستقيم (Δ) و من أجل كل $x\in\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ ، (C) يقع فوق المستقيم (Δ) 0.5

3/أ) دراسة تغيرات الدالة f :

إتجاه التغير : الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ حيث: $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\times x-1-\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-2\ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ ، $f'(x)\succ 0$ أي أن $\frac{g(x)}{x^2}\succ 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ 0.5

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	-∞ ↗	+∞

0.5.....

ب/ الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ حيث: $f''(x)=\frac{\frac{2(x^2-1)}{x}\times 2x^2-4x(x^2-2\ln(x))}{4x^4}=\frac{-4x+8x\ln(x)}{4x^4}=\frac{-1+2\ln(x)}{x^3}$

x	0	$\sqrt{e}$	+∞
إشارة f''(x)	−	0	+

0.5.....

الدالة f'' تنعدم من أجل $x=\sqrt{e}$ مغيرة إشارتها وبالتالي النقطة $C\left(\sqrt{e},f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) حيث $C\left(\sqrt{e},\frac{e+3}{2\sqrt{e}}\right)$

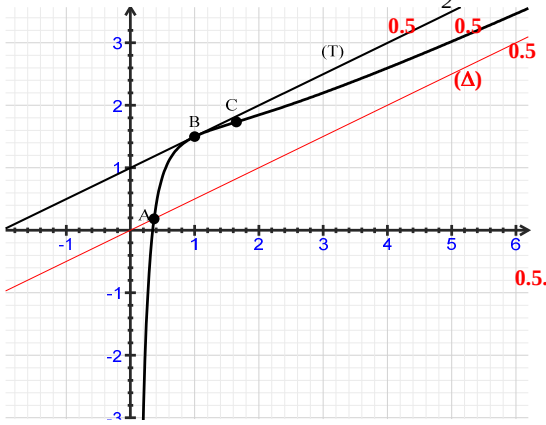
4/ فاصلة النقطة B هي حل المعادلة : $f'(x)=\frac{1}{2}$ مع $x\in]0,+\infty[$

يعني $f'(x)=\frac{1}{2}$ أي $\frac{x^2-2\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{2}=0$ وبالتالي $\frac{-\ln(x)}{x^2}=0$ و $x=1$ ، إذن $B\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 0.5

5/ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

و $f(0.34)\approx -0.06$ ، $f(0.35)\approx 0.03$ إذن $f(0.34)\times f(0.35)<0$ و منه $0.34<\alpha<0.35$ 0.5

6/ رسم كل من (C) ، (Δ) و (T) : $(\Delta): y=\frac{x}{2}$ ، $(T): y=\frac{1}{2}x+1$



الجزء الثالث :

$X_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ ، $n\in\mathbb{N}$

1/من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $X_{n+1}=e^{\frac{n+1-2}{2}}=e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{n-2}{2}}=e^{\frac{1}{2}}X_n$

إذن المتتالية (X_n) هندسية أساسها $e^{\frac{1}{2}}$ وحدها الأول : $X_0=\frac{1}{e}$ 0.5

2/ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$X_{n+1}-X_n=e^{\frac{n+1-2}{2}}-e^{\frac{n-2}{2}}=e^{\frac{n-2}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)$

بما أن $e^{\frac{1}{2}}-1\succ 0$ فإن المتتالية (X_n) متزايدة 0.5

3/ بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} X_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{n-2}{2}}\right)=+\infty$ فإن المتتالية (X_n) ليست متقاربة 0.5