تصحيح الفرض المحروس الأول للفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : 12نقطة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

1/ أ/ $+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)e^x$

ب/ $\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x)=0$ ، $\lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0$

جـ/ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2e^x+xe^x+e^x\right]=0$ ، نستنتج أن المستقيم ذوالمعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f)

2 . أ/ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x=(x+1)(x+2)e^x$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^x \succ 0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x+1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		+	

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	$\frac{3}{e^2}$	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

3/ دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)>0$

4/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_{exp}) : $\left[f(x)-e^x\right]=(x^2+x+1)e^x-e^x=(x^2+x)e^x=x(x+1)e^x$

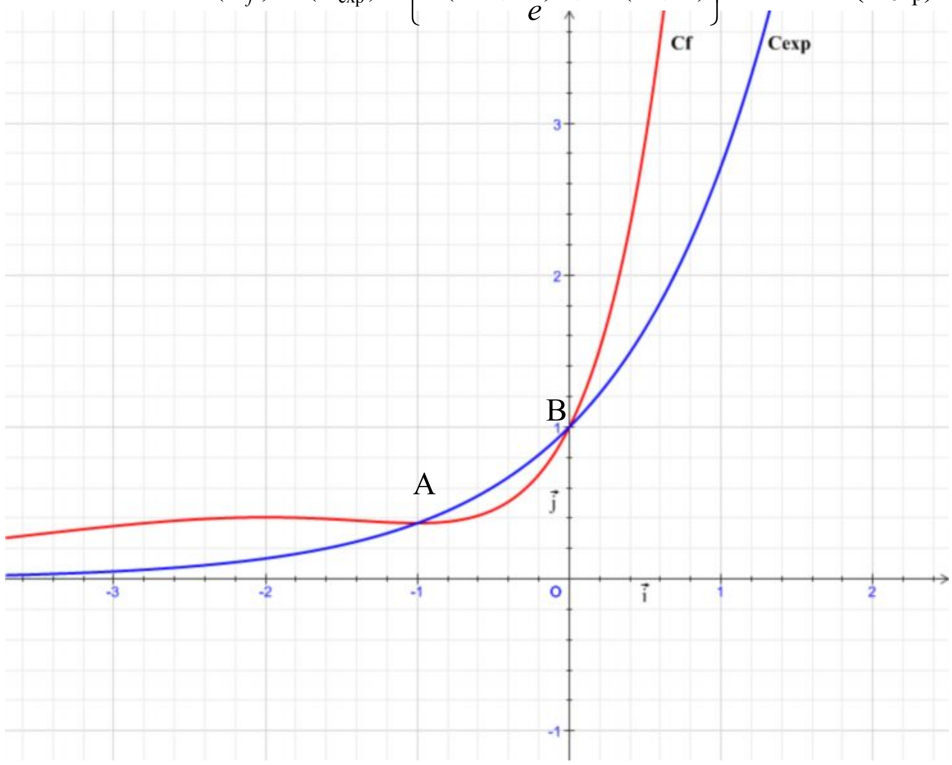
إشارة $\left[f(x)-e^x\right]$ من إشارة $\left[x(x+1)\right]$ أي :

في المجال $]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;\ +\infty[$ $\quad f(x)-e^x>0$ أي المنحنى (C_f) يقع فوق (C_{exp})

في المجال $]-1\ ;\ 0[$ $\quad f(x)-e^x<0$ أي المنحنى (C_f) يقع تحت (C_{exp})

من أجل $x=-1$ أو $x=0$ (C_f) و (C_{exp}) يتقاطعان $\left\{A(-1\ ,\ \frac{1}{e})\ ;\ B(0\ ,\ 1)\right\}$ $(C_f)\cap(C_{exp})=$

إنشاء كل من (C_f) و (C_{exp}) :



التمرين الثاني : 08 نقاط

$$f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$

1/ تبرير أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$:

تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذ كان : $e^{2x}-e^{x}+1\neq 0$ ، نضع $X=e^{x}$ فنحصل على : $X^{2}-X+1\neq 0$ حيث $\Delta=-3$

بما أن $\Delta\prec 0$ فإن كثير الحدود $\left(X^{2}-X+1\right)$ لا يقبل جذور في $\mathbb{R}$ أي أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $X^{2}-X+1\neq 0$

ومنه فإن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $e^{2x}-e^{x}+1\neq 0$, إذن $D_f=\mathbb{R}$

2/ أ/ نلاحظ من البيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}\right)=0$ [$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{2x}-e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)=1$], إذن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مستقيم مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$

ب/ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}=\frac{e^{2x}(2-e^{-x})}{e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})}=\frac{2-e^{-x}}{1-e^{-x}+e^{-2x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2-e^{-x}}{1-e^{-x}+e^{-2x}}\right)=2$, نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$

ج/ **تعيين قيمة $f'(0)$:**

ط1 :

$f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة $k(0,1)$

معادلة للمماس (T) من الشكل $y=f'(0)x+1$

بما أن النقطة $B(1;3)$ تنتمي إلى المماس (T) فإن $3=f'(0)\times 1+1$ ومنه فإن $f'(0)=2$

ط2 :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=\frac{-e^{3x}+4e^{2x}-e^{x}}{(e^{2x}-e^{x}+1)^{2}}$ ومنه فإن $f'(0)=2$

د / المعادلة : $f(x)=0$ معرفة على $\mathbb{R}$

$f(x)=0$ تعني $\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}=0$ أي أن $\left(2e^{2x}-e^{x}=0 \text{ و } e^{2x}-e^{x}+1\neq 0\right)$

$2e^{2x}-e^{x}=0$ تعني أن $2e^{2x}=e^{x}$ أي أن $e^{x}=\frac{1}{2}$ ومنه فإن $x=ln\left(\frac{1}{2}\right)$ أي أن $x=-ln\,2$ و منه فإن $S=\{-ln\,2\}$

دراسة إشارة $f(x)$ بيانيا :

من البيان نستنتج أن :

* من أجل $x=-ln\,2$, $f(x)=0$
* من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;\,-ln2[$ يكون $f(x)\prec 0$
* من أجل كل x من المجال $]-ln\,2\,;\,+\infty[$ يكون $f(x)\succ 0$