تصحيح الفرض المحروس الأول للفصل الأخير

التمرين الأول : $p(z)=(z)^3-8(z)^2+4(4-i)(z)-24(1-i)$..................$(I)$

1)إثبات أن المعادلة: (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 : نضع $z_0=iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم

z_0 حل للمعادلة (E) يعني : $p(z_0)=0$ أي $p(iy)=0$ و يكافىء : $(iy)^3-8(iy)^2+4(4-i)(iy)-24(1-i)=0$

بعد التبسيط نجد : $8y^2+4y-24+(-y^3+16y+24)i=0$ ومنه : $\begin{cases}8y^2+4y-24=0\\-y^3+16y+24=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}2y^2+y-6=0........(1)\\-y^3+16y+24=0...(2)\end{cases}$

لنحل المعادلة (1) : $\Delta=49$ ، $y=\frac{3}{2}$ أو $y=-2$ ، بماأن (-2) حل للمعادلة (2) فإن $z_0=-2i$ 02

2) من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2\alpha i)z+2\beta i$ ...(II)

من (I) و (II) و بالمطابقة نجد : $\begin{cases}\alpha+2i=8\\\beta+2\alpha i=4(4-i)\\2\beta i=-24(1-i)\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-8-2i\\\beta=12+12i\end{cases}$

وبالتالي من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=(z+2i)(z^2-2(4+i)z+12+12i)$ 02

3) $p(z)=0$ يكافىء $(z+2i)=0$ أو $z^2-2(4+i)z+12+12i=0$ ، $z^2-2(4+i)z+12+12i=0$ ، $\Delta'=3-4i$

تعيين الجذرين التربيعيين لـ Δ' : ليكن $\omega=x+yi$ جذرا تربيعيا لـ Δ' يعني $\Delta'=\omega^2$ يعني $\begin{cases}x^2+y^2=5\\x^2-y^2=3\\2xy=-4\end{cases}$ أي $\begin{cases}2x^2=8\\2y^2=2\\xy=-2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x^2=4\\y^2=1\\xy=-2\end{cases}$

أي $(x=2$ و $y=-1)$ أو $(x=-2$ و $y=1)$ لأن $xy<0$ ، إذن $\omega=2-i$ أو $\omega=-2+i$

نضع : $\Delta'=(2-i)^2$ ، $z_1=6$ و $z_2=2+2i$ 02

4) $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{2+2i+2i}{6+2i}=\frac{2+4i}{6+2i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=arg\left(\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)=\frac{\pi}{4}$ و $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....0.5 + 0.5

التمرين الثاني : $f(x)=\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$, $D_f=\mathbb{R}^*$

1/ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{e^x-1}=\frac{(\alpha x+\beta)e^x-\alpha x-\beta+\gamma}{e^x-1}$

بالمطابقة مع العبارة الأولى لـ $f(x)$ نجد : $\alpha=2$ ، $\beta=-1$, $\gamma=1$ و بالتالي : $f(x)=2x-1+\frac{1}{e^x-1}$ 0.5

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=2x+a+\frac{be^x}{e^x-1}=\frac{(2x+a+b)e^x-2x-a}{e^x-1}$

بالمطابقة مع العبارة الأولى لـ $f(x)$ نجد : $a=-2$, $b=1$, و بالتالي : $f(x)=2x-2+\frac{e^x}{e^x-1}$ 0.5

/2

01

قيم x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$\ln(2)$		$+\infty$
إشارة e^x-2		-		-	0	+	
إشارة $e^x-\frac{1}{2}$		-	0	+		+	
إشارة $h(x)$		+	0	-	0	+	

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty\ ;\ 0[$ و $]0\ ;\ +\infty[$ حيث : $f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$ 01

تحليل العبارة $\left(2e^{2x}-5e^{x}+2\right)$, نضع : $X=e^{x}$ فنحصل على : $\left(2X^{2}-5X+2\right)$ حيث $\Delta=9$ و $X_1=\frac{1}{2}$ و $X_2=2$

أي: $2X^2-5X+2=2(X-2)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ إذن من أجل $x\in D_f$: $f'(x)=\frac{h(x)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$

3/دراسة تغيرات الدالة f : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ **4*0.25....**

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		- ln(2)		0		Ln(2)		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	- 2ln(2)-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2ln(2)	↗	$+\infty$

01

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)=0$

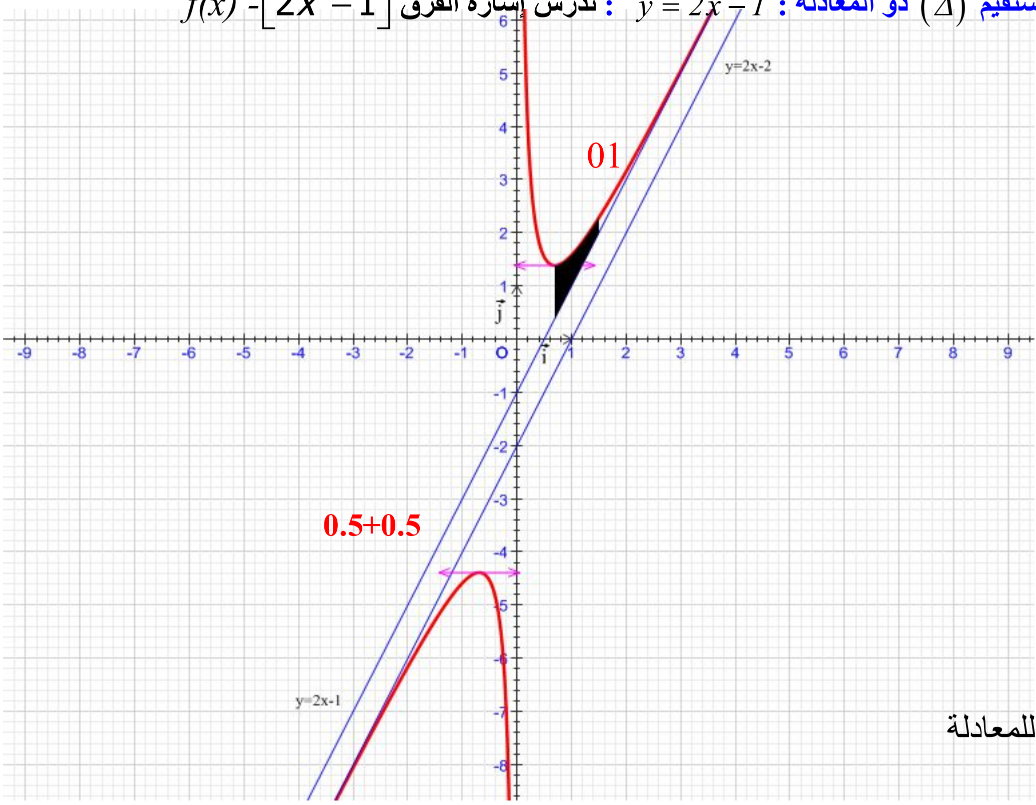
إذن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين معادلتاهما من الشكل : $y=2x-1$, $y=2x-2$

5/ من أجل كل x من D_f : $f(-x)+f(x)=2(-x)-2+\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}+2x-2+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}=-4+\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-4+1=-3$

0.5 ....

نستنتج أن النقطة ذات الإحداثيات $\left(0\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C) **0.5..**

6/ دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=2x-1$: ندرس إشارة الفرق $f(x)-[2x-1]$



$f(x)-[2x-1]=\frac{1}{e^{x}-1}$

من أجل $x\in\,]-\infty\ ;\ 0[$

$\frac{1}{e^{x}-1}<0$ و منه (C) يقع تحت (Δ)

01...

من أجل $x\in x\in\,]0\ ;\ +\infty[$

$\frac{1}{e^{x}-1}>0$ و منه (C) يقع فوق (Δ)

7/ رسم المنحنى (C) :

8/ المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط

الحقيقي m عدد وإشارة الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة

ذات المجهول x التالية :

$(2x-2-m)e^{x}-2x+m+3=0$ .... (α)

بعد الحساب نجد

(α) تكافئ $\frac{(2x-1)e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}=m+1$ أي $f(x)=m+1$

و بالتالي حلول المعادلة (α) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$

- من أجل $m + 1 < -2\ln(2) - 3$ أي $m < -2\ln(2) - 4$ المعادلة (α) تقبل حلان سالبان
- من أجل $m + 1 = -2\ln(2) - 3$ أي $m = -2\ln(2) - 4$ المعادلة (α) تقبل حل مضاعف سالب
- من أجل $-2\ln(2) - 3 < m + 1 < 2\ln(2)$ أي $-2\ln(2) - 4 < m < 2\ln(2) - 1$ المعادلة (α) لاتقبل حل
- من أجل $m + 1 = 2\ln(2)$ أي $m = 2\ln(2) - 1$ المعادلة (α) تقبل حل مضاعف موجب
- من أجل $m + 1 > 2\ln(2)$ أي $m > 2\ln(2) - 1$ المعادلة (α) تقبل حلان موجبان

أ/ الدالة f مستمرة على المجال $]0\,;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية F على هذا المجال معرفة بـ :

$$F(x) = x^2 - 2x + \ln\left(e^x - 1\right)$$

01..

ب)
$$\int_{\ln 2}^{\ln\lambda} [f(x) - 2x + 1]\,d(x) = \int_{\ln 2}^{\ln\lambda} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) d(x) = \int_{\ln 2}^{\ln\lambda} \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) d(x)$$

$$= \left[\ln(1 - e^{-x})\right]_{\ln 2}^{\ln\lambda} = \ln\left(\frac{1 - e^{-\ln\lambda}}{1 - e^{-\ln 2}}\right) \quad (u.a)$$

01..$$= \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2(\lambda - 1)}{\lambda}\right) \quad (u.a)$$