الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

اختبار في مادة الرياضيات

لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي
المدة: 4 ساعات

التمرين الأول : العلامة (06 نقاط) .

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ ، C_f تمثيل بيانها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،لدينا:
$\sqrt{1+x^2}-x>0$،$\sqrt{1+x^2}+x>0$،$2\sqrt{1+x^2}-x>0$.

2) أ - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

ب – احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ C_f ؟

جـ - ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم D الذي معادلته $y=x$ و بالنسبة إلى المستقيم D' الذي معادلته $y=-3x$.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$.

أ - اثبت أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$.

جـ - عين إشارة $g(x)$.

4) أ- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب – بين أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

جـ - شكل جدول تغيرات f .

5) ارسم المستقيمين D و D' والمنحنى C_f .

التمرين الثاني : العلامة (04 نقاط) .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+i\sqrt{3}z-i=0........(E)$

2) ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $[0;\frac{\pi}{2}]$ ، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E') :
$z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0.........(E')$.

أ - تحقق أن : $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

ب – حل في C المعادلة (E') .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$.، نعتبر النقط A و B و C التي لواحقها i ، $\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ و $-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$ على الترتيب .

أ- عين العدد θ حتى تكون A و B و C على استقامة واحدة .
ب- عين العدد θ حتى تنتمي النقطتان B و C إلى دائرة مركزها النقطة O. ما هو نصف قطر الدائرة ؟

<u>التمرين الثالث</u> : العلامة (03 نقاط) .

I) c_1 و c_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب c_1 الأعداد : 0،0،$\frac{\pi}{3}$،$\frac{\pi}{3}$،$\frac{4\pi}{3}$،$\frac{4\pi}{3}$ و تحمل أوجه المكعب c_2 الأعداد : 0،0،$\frac{\pi}{6}$،$\frac{\pi}{6}$،$\frac{\pi}{2}$،$\frac{\pi}{2}$.

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ c_1 و c_2 . نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ر مية العدد $\sin(\alpha+\beta)$.

1) ماهي القيم الممكنة للمتغير X ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول) .
2) عيّن قانون احتمال X .
3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(x)$ للمتغير العشوائي X .

II) نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص ما $100\ DA$ عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha+\beta)=1$ أو $\sin(\alpha+\beta)=-1$ ، ويخسر $50\ DA$ في باقي الحالات .

1) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
1) عيّن قانون احتمال Y .
2) نرمي حجري النرد 5 مرات . ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب $300\ DA$ ؟

<u>التمرين الرابع</u> : العلامة (03 نقاط) .

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الصحيحة من بين الإجابات أ، ب، ج المقترحة مع التعليل.

	أ	ب	ج
إذا كان $Z=\frac{4-i}{1+2i}$ فإن Z هو العدد المركب	$3-3i$	$\frac{2-9i}{5}$	$\frac{2-9i}{-3}$
مرافق العدد المركب $Z=\frac{1-z}{1+i}$ (حيث $z=x+iy$ مع x و y عددين حقيقيين) هو:	$\frac{1+z}{1-i}$	$\frac{1}{2}\left[1+x-y+i(1+x+y)\right]$	$\frac{1-\overline{z}}{1-i}$
إذا كان $Argz=\frac{\pi}{3}$ و $z'=-5$ فإن:	$Argzz'=\frac{\pi}{3}$	$Argzz'=\frac{4\pi}{3}$	$Argzz'=-\frac{2\pi}{3}$

<u>التمرين الخامس</u> : العلامة (04 نقاط) .

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ المعادلة : $11n-24m=1$**............(1)**
أ- برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .
ب- باستخدام خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) .
جـ- عين مجموعة حلول المعادلة (1) .
2) أ- بين أن 9 يقسم $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

ب- بين أنه مهما يكن الحل $(m;n)$ فإن : $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$.

جـ- بين أن : $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$.

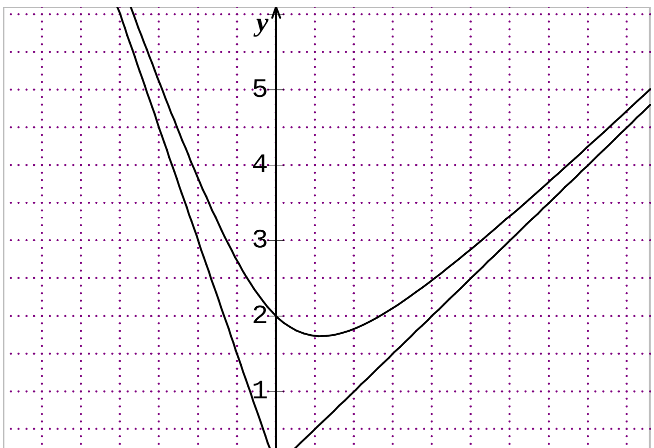
استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث $(10^{11n}-1)N-(10^{24m}-1)M=9$.

د- بين ان كل قاسم مشترك لـ $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$ يقسم كذلك 9 .

هـ- استنتج مما سبق $p\,\mathbf{gcd}(10^{11}-1;10^{24}-1)$.

الحل النموذجي و سلم التنقيط لشعبتي الرياضيات و التقني الرياضي

الإجـابـــــــــــــــــة	سلم التنقيط
التمرين الأول (06 نقاط)	
1)- من أجل x سالب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و $-x$ موجب مما يؤدي إلى $\sqrt{1+x^2}-x>0$	0.25
من أجل x موجب : $1+x^2>x^2$ نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2}\ >x$ .... ومنه : $\sqrt{1+x^2}\ \ -x>0$	0.25
- من أجل x موجب : $\sqrt{1+x^2}$ موجب و x موجب مما يؤدي أن $\sqrt{1+x^2}+x$ موجب	0.25
من أجل x سالب : $1+x^2>x^2$ ، نجذر الطرفين $\sqrt{1+x^2}\ >-x$ .... و منه : $\sqrt{1+x^2}\ \ +x>0$	0.25
- لدينا : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ ، بإضافة العبارة $\sqrt{1+x^2}$ الموجبة تماما إلى طرف الأيسرمن المتراجحة فينتج : $2\sqrt{1+x^2}-x>0$	0.25
2) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)$ .... $\lim\limits_{x\to+\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=0$ نستنتج أن المستقيم D الذي معادلته : $y=x$ مقارب مائل C_f .	3×0.25
ب- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)=0$ .... نستنتج أن المستقيم D' الذي معادلته : $y=-3x$ مقارب مائل لـ C_f .	2×0.25
جـ - لدراسة الوضعية النسبية ندرس إشارة $f(x)-x$. $f(x)-x=2(\sqrt{1+x^2}-x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D.	0.25
- $f(x)+x=2(\sqrt{1+x^2}+x)$ ، هذه العبارة موجبة تماما حسب (1) . ... إذن C_f فوق D'.	0.25.

0.25	3) أ- من أجل كل عدد حقيقي x $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$
0.25	إشارة الدالة المشتقة من إشارة دالة البسط ، و دالة البسط $2\sqrt{1+x^2}-x$ موجبة تماما إذن الدالة g متزايدة . .....
2×0.25	ب- $g(x)=0$ معناها $2x-\sqrt{1+x^2}=0$ معناها $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ....
0.5 0.25	جـ - إشارة $g(x)$: من أجل $x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x)\geq 0$ من أجل $x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ فإن $g(x)\leq 0$ ....
0.5	4) أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ....
	ب- من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ....
	جـ. جدول التغيرات ....
0.75	د- الرسم  ....

التمرين الثاني : العلامة (04 نقاط) .

2×0.5 (1 $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ ....

2×0.5 $z_1 = \dfrac{1+i(2-\sqrt{3})}{2} ; z_2 = \dfrac{-1-i(2+\sqrt{3})}{2}$ ....

0.25 (2 أ- التحقق : $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 = (1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1$ ......

0.25 $(1-\sin^2\theta) + 2i\cos\theta - 1 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$ ....

2×0.25 ب- $z'_1 = \cos\theta + i(1-\sin\theta) ; z'_2 = -\cos\theta - i(\sin\theta + 1)$ ....

0.5 (3 أ - $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ....

0.5 ب- $\theta = 0$ ، نصف قطر الدائرة : $r = \sqrt{2}$ ....

التمرين الثالث : العلامة (03 نقاط) .

(I 1-

0.5

	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$	$4\frac{\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

(2

0.5

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

0.5 (3 $E(X) = \dfrac{1}{6}$ ....

0.5 $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ....

(II 1-

x_i	-50	100

0.5	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline p(X=x_i) & \frac{6}{9} & \frac{3}{9}\\ \hline\end{array}$
0.5	2) نتعرف هنا على الثنائي $p(Y=3)=C_5^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{6}{9}\right)^2=\frac{40}{243}$ ....
	<u>التمرين الرابع</u> : العلامة (03 نقاط) .
	تمنح علامة واحدة لكل إجابة صحيحة مع التعليل.
	<u>التمرين الخامس (</u> 04 نقط)
	) أ- لدينا $p\,\mathbf{gcd}(11;24)=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u,v بحيث
	. $11u+24v=1$
0.25	يكفي أن نضع $n=u$ و $m=v$.
	ب- باستخدام خوارزمية إقليدس
	$24=11\times2+2$
	$11=2\times5+1$ ....
0.25	إذن :
	$1=11-2\times5$
	$1=11-(24-11\times2)\times5$....................................
0.25	$1=11\times11-24\times5$
	الحل الخاص هو : $(5;11)$..
	جـ - لدينا $11n-24m=1$
	$11\times11-24\times5=1$
0.5	بالطرح طرفا من طرف نجد : $11(n-11)-24(m-24)=0$
0.25	$11(n-11)=24(m-24)$
0.25	بتطبيق مبرهنة غوص نجد : $S=\{(11k+5;24k+11);k\in Z\}$ ....
	2) أ – لدينا $10\equiv1[9]$ إذن $10^{11}\equiv1[9]$ و منه $10^{11}-1\equiv0[9]$ أي 9 يقسم $10^{11}-1$..........
	وبنفس الطريقة نبين أن : 9 يقسم $10^{24}-1$..
025.	ب – بتعويض $24m=11n-1$ في العبارة
	$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=(10^{11n}-1)-10(10^{11n-1}-1)=10^{11n}-1-10^{11n}+10=9$
0.25×2	جـ - حسب الخاصية : $1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1};x\neq1$ ويوضع $x=10^{11}$ نتحصل على
	$10^{11n}-1=(10^{11}-1)(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$............................
	إذن $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$
	$N=(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$ و
	$M=10(1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{m-1}$ ....
0.25	د – ليكن d قاسما مشتركا لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$
	إذن : $10^{11}-1=k'd$ و $10^{24}-1=k''d$ و حسب (د) وبالتعويض نجد $k'dN-k''dM=9$
	إي $d(k'N-k''M)=9$ ....

0.25 0.5	ومنه d يقسم 9. هـ - حسب السؤال السابق d يقسم 9 إذن $d \in \{1;3;9\}$ وحسب (أ) لدينا d قاسم مشترك لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ .... إذن : $pgcd(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$ ....