الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

**نموذج اختبار البكالوريا في مادة الرياضيات**

**الشعبة : علوم تجريبية**
**المدة : 03 ساعات**
**المعامل : 05**

**تمرين 1 ( 06 نقط)**

$P(z)$ كثير الحدود في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث :

$P(x)=z^3+(7-4i)z^2+(9-16i)z-9-21i$ .

1) أثبت أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا $z_0$ يطلب تعيينه .

2) اكتب $P(z)$ على الشكل $P(z)=(z-z_0)(z^2+bz+c)$

3) احسب $(2-i)^2$ ثم حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

4) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . $A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من هذا المستوي لواحقها على الترتيب $-3$; $i$ و $-4+3i$.عين إحداثيتي $G$ مرجح النقط $A$ ، $B$ و $C$ المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2 ، 1 و $-1$

5) عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $2MA^2+MB^2-MC^2=-6$ .

**تمرين 2 ( 04 نقط)**

صندوق يحتوي على 8 قريصات صفراء و15 حمراء غير مميزة باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع قريصتين من الصندوق .

1-احسب احتمال الحادثة : E "القريصة المسحوبة الأولى صفراء"

2- نكرر سبعة مرات هذه التجربة،و بعد كل تجربة نرجع القريصتين إلى الصندوق . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة المتمثلة في عدد وقوع الحادثة E خلال التجارب السبعة.

أ* احسب احتمال الحادثة A " الحادثة E تقع بالضبط 3 مرات"

ب* احسب احتمال الحادثة B " الحادثة E تقع 6 مرات على الأقل"

**تمرين3 ( 06 نقط)**

1. نعتبر الدالة $g$ ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+3-2\ln x$$

أ) ادرس اتجاه تغييرات الدالة $g$ .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

2. لتكن $f$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$$

$C$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$ .

أ) بين أنه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$، فسر هذه النتيجة بيانيا.

ج) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ .

ليكن $D$ المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x$ ، احسب $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$ .

ه) أنشئ المستقيم $D$ والمنحنى $C$ الممثل للدالة $f$ .

**تمرين 4 (04 نقط)**

**لتكن $A;B;C$ ثلاثة نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و ليكن $k$ عدد حقيقي حيث $k\in[-1;+1]$. نضع $G_k$ مرجح الجملة : $\{(A;k^2+1),(B;k),(C;1-k)\}$ .**

**1) مثل النقط $C;B;A$ و $I$ منتصف $[BC]$ ثم أنشئ النقطتين $G_1$ و $G_{-1}$ .**

**2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ من المجال $[-1;+1]$ فإن : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ .**

*** اكتب جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-1;+1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$ .**

*** استنتج مجموعة النقط $G_k$ لما $k$ يمسح المجال $[-1;+1]$ .**

الحلول النموذجية

التمرين 1

) نعلم أن $z_0{}^3+(7-4i)z_0{}^2+(9-16i)z_0-9-12i=0$ و منه

$$\begin{cases} z_0{}^3+7z_0{}^2+9z_0-9=0....(1) \\ -4z_0{}^2-16z_0-12=0....(2) \end{cases}$$

و منه $z_0=-3$ . ومنه $P(z)=(z+3)(z^2+bz+c)$ ، ننشر و بالمطابقة نجد
: $b=4-4i$ و $c=-3-4i$ .

نضع $z^2+4(1-i)z-3-4i=0$ و $\Delta'=(2-i)^2$ و منه $z_1=i$ و $z_2=-4+3i$ .

جذور $P(z)$ هي $-3\ ;\ i\ ;\ -4+3i$ .

2) أ) $(2+1-1)\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ إذن $2z_G=2z_A+z_B-z_C$ و منه $Z_G=-1-i$ .

و ومنه $\overrightarrow{OG}=-\vec{i}-\vec{j}$

ب) ليكن $\Gamma=\left\{M\in(p):2MA^2+MB^2-MC^2=-6\right\}$ نكتب :

$$2MA^2+MB^2-MC^2=2MG^2+2\left[\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)\right]+2GA^2+GB^2-GC^2=-6$$

و منه $\overrightarrow{OG}=-\vec{i}-\vec{j}$

و بما أن $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و $GA^2=5\ ;\ GB^2=5\ ;\ GC^2=25$ فإن :

و منه $(\Gamma)=\left\{M\in(P)/MG^2=2\right\}$ و منه $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $G$ و طول نصف قطرها $\sqrt{2}$.

– $\boldsymbol{P(E)=\frac{8}{23}}$ ، 2 أ $\boldsymbol{P(A)=P(X=3)=\binom{7}{3}\times\left(\frac{8}{23}\right)^3\times\left(\frac{15}{23}\right)^4\approx 0.2664}$

2 ب $\boldsymbol{P(B)=P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)=\binom{7}{6}\times\left(\frac{8}{23}\right)^6\times\left(\frac{15}{23}\right)+\binom{7}{7}\times\left(\frac{8}{23}\right)^7\approx 0.0087}$

التمرين 3:

1. أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

نلاحظ بسهولة أن $g'(x)$ له إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

و منه جدول تغيرات الدالة $g$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ب) من جدول تغيرات الدالة $g$ نستنتج أن $g(x)$ موجب تماما على المجال $]0;+\infty[$ .

2. أ) من $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ ينتج أن $f'(x)$ له إشارة $g(x)$، وهذا يعني أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{x^2-1}{2x}\right)=-\infty$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحنى $C$.

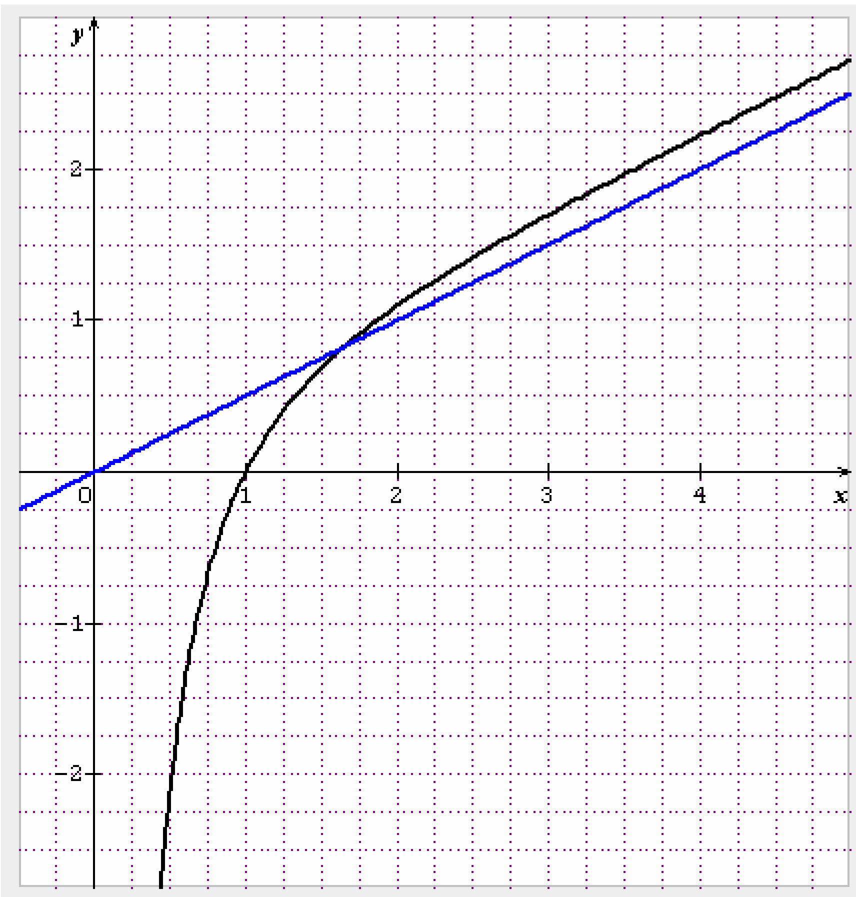
ج) $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)=0$ وهذا يعني أن $D$ مستقيم مقارب للمنحنى $C$.

د) جدول تغيرات الدالة $f$.

| $x$ | $0$      $1$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

ه)



التمرين 4

* لدينا فرضا : $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ و نكتب $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ حيث $J$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و منه $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن $3\overrightarrow{G_1J}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{JG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$ .

* لدينا فرضا : $2\overrightarrow{G_{-1}A}-\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$ و $L$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1)\}$ أي $\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{G_{-1}L}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$ و هذا يعني أن $G_{-1}$ منتصف $[LC]$ .

**2)** $G_k$ مرجح الجملة : $\{(A;k^2+1),(B;k),(C;1-k)\}$ معناه

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$$

أي $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{G_kA}-k\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ و منه

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$

و منه $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}=-k\overrightarrow{CB}$ أي : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ .

* $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ و منه

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

| $x$ | $-1$ | $1+$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $+\frac{1}{2}$ ↘ | $-\frac{1}{2}$ |

نستنتج أنه لما $k$ يمسح المجال $[-1;+1]$

فإن $\left(\frac{-k}{k^2+1}\right)$ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$

و بالتالي مجموعة النقط $G_k$ لما $k$ يمسح المجال $[-1;+1]$ هي القطعة $[G_1G_{-1}]$ .