التصحيح وسلم تنقيط — التاريخ :24 /2009/05

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول : (3 نقاط)

1) الجملة خاطئة لأن : $287 \times 7 = 2009$ أي 7 يقسم 2009 . **0.5**

2) الجملة صحيحة لأن : $287 \times 7 = 2009$ و $1430 = 2\times5\times 11\times 13$
و $PGCD(2009,1430) = 1$. **0.5**

3) الجملة صحيحة لأن المعادلة المعطاة تكافئ : $287x + 3y = 1$ وبما أن 287 و 3 أوليان فيما بينهما
فإن حسب نظرية بيزو توجد على الأقل ثنائية (α , β) تحقق $287\alpha + 3\beta = 1$. **01**

4) الجملة خاطئة لأن من أجل $k = 2$ (مثلا) الثنائية $(-4 , 51)$ ليست حلا للمعادلة المعطاة فعلا
$24(-4) + 35(51) = 1689$ و $1689 \neq 9$. **0.5**

5) الجملة خاطئة لأنه لايوجد أي عدد طبيعي a يحقق : $a > 9$ و $8a^2 + 0\times a + 9 = 2009$ لأن هذه
المعادلة تكافئ $a^2 = 250$ ولايوجد أي عدد طبيعي مربعه يساوي 250 . **0.5**

التمرين الثاني : (6 نقاط)

1) * إحداثيات كل نقطة من النقط B ، C ، E ، F ، H ثم I و J .
$B(2 , 0 ,0)$ ، $C(2 ,4, 0)$ ، $E(0 , 0 ,2)$ ، $F(2 , 0 , 2)$ ، $H(0 , 4 ,2)$
I منتصف $[AF]$: $I(1 , 0 ,1)$ و $J(0 ,2 ,2)$ **نقطة**

* مركبات الشعاع $\overrightarrow{IJ}$ و الشعاع $\overrightarrow{JC}$: $\overrightarrow{IJ}(-1 , 2 , 1)$ و $\overrightarrow{JC}(2 , 2 , -2)$ **0.5**

* بما أن : $\overrightarrow{AF}(2 , 0 , 2)$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{IJ} = -2+0+2 = 0$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{JC} = 2\times2+0\times2+2\times(-2) = 0$
نستنتج أن $\overrightarrow{AF}$ عمودي على $\overrightarrow{IJ}$ وعمودي على $\overrightarrow{JC}$ فهو شعاع ناظم للمستوي (IJC) **0.75**

* المستوي (IJC) يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AF}$ شعاع ناظمي له معادلته تكتب
$2(x-2) + 0(y-4) + 2(z-0) = 0$ أي $x + z = 2$ **0.5**

النقط B ، C ، E ، H تنتمي إلى المستوي (IJC) لأن إحداثيات كل نقطة من هذه النقط تحقق
المعادلة $x + z = 2$ فعلا : $2 + 0 = 2 + 0 = 0 + 2 = 0 + 2 = 2$ **0.5**

2) (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $MB^2 + MC^2 + ME^2 + MH^2 = 48$

* نفرض $M(x , y , z)$. لدينا :

$$MB^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4$$

$$MC^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 20$$

$$ME^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4$$ **نقطة**

$$MH^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 4z + 20 .$$

نستنتج أن النقطة M تنتمي إلى (Γ) إذا وفقط إذا :

$4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y-8z+48=48$ أي $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ **0.25**

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ تكافئ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ **0.25**

(Γ) سطح الكرة التي مركزها النقطة $\omega(1\ ,2\ ,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$ **0.25**

* إحداثيات مركز ثقل المثلث IJC هي : $\left(\dfrac{x_I+x_J+x_C}{3},\dfrac{y_I+y_J+y_C}{3},\dfrac{z_I+z_J+z_C}{3}\right)$

بما أن $\dfrac{x_I+x_J+x_C}{3}=\dfrac{1+0+2}{3}=1$ و $\dfrac{y_I+y_J+y_C}{3}=\dfrac{0+2+4}{3}=2$ و $\dfrac{z_I+z_J+z_C}{3}=\dfrac{1+2+0}{3}=1$

نستنتج أن مركز ثقل المثلث IJC هي النقطة ω **0.25**

* نصف القطر و إحداثيات مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمستطيل EBCH .

بما أن المثلث EHC قائم في H فإن قطر (γ) يساوي طول الوتر EC ومركزها منتصف [EC]

بما أن $EC=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ نستنتج أن نصف قطر (γ) يساوي $\sqrt{6}$ **0.5**

و إحداثيات مركزها : $\left(\dfrac{2+0}{2},\dfrac{4+0}{2},\dfrac{0+2}{2}\right)$ أي (1 , 2 , 1) وهي النقطة ω .

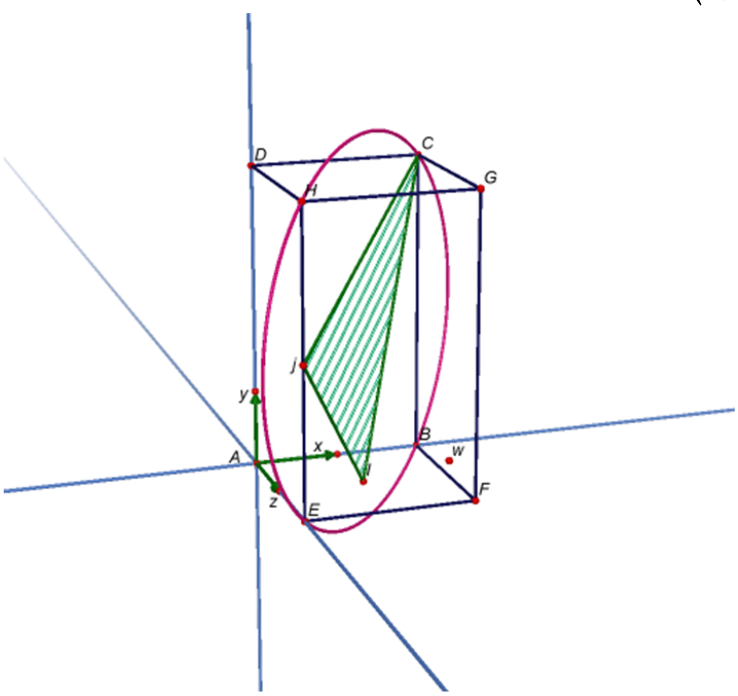
* تمثيل ديكارتي للدائرة (γ) :

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6\\ x+z=2\end{cases}$$ **0.25**

لأن كل نقطة من (γ) تبعد عن المركز ω بنفس المسافة $\sqrt{6}$ و نقط (γ) تنتمي إلى المستوي (IJC)

(لأن ثلاث نقط من (γ) تنتمي إلى المستوي (IJC) وهي B ، C ، E) .

إليك الرسم للتوضيح (غير مطلوب في التمرين)



<u>التمرين الثالث</u> : (3.5 نقطة) :

1) حل المعادلة ذات المجهول z : $z^2+z+1=0$:

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=3i^2$ و $z'=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{j}$ **0.5**

2) $|j|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و $\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ نستنتج أن : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $\frac{1}{j}=\overline{j}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ **0.5**

3) * M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ تعني أن :

$z'-0=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ نستنتج أن : $z'=\frac{1}{j}z$. **0.5**

* الشكل الجبري العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$: (نفرض $z'-\alpha\neq0$ أي $z-\beta\neq0$)

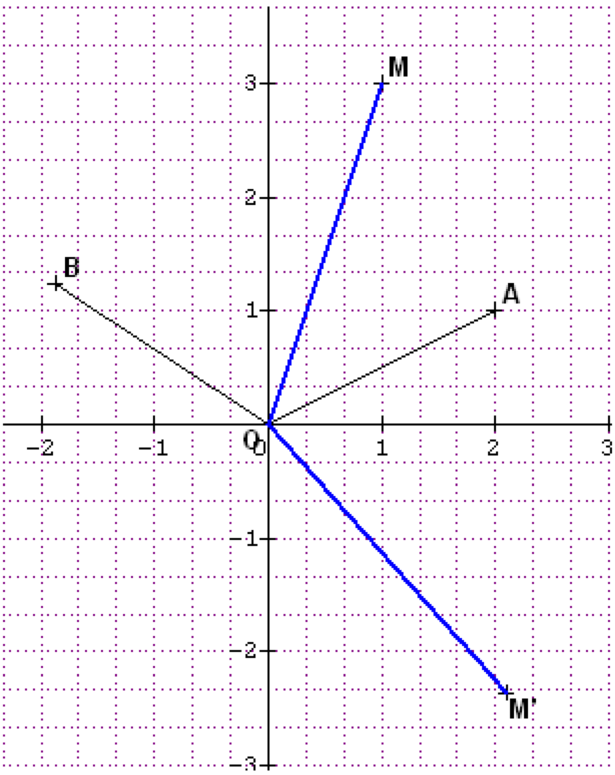
$$\frac{z-\beta}{z'-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{1}{j}z-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\alpha j}{j}}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\beta}{j}}=(z-\beta)\times\frac{j}{(z-\beta)}=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **0.5**

* $\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=|j|=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

$\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=1$ تكافئ $\frac{BM}{AM'}=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\frac{2\pi}{3}$ تكافئ $\left(\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

* الرسم :

0.5



التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول : φ الدالة العددية المعرفة على **R** كمايلي : $\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1$

1) * لما x يؤول إلى ∞- فإن e^{-x} يؤول إلى ∞ + و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ +

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ **0.25**

* لما x يؤول إلى ∞+ فإن e^{-x} يؤول إلى 0 و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ + ، حالة عدم التعيين .

$\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1=2\dfrac{x^2+1}{e^x}-1=2\left(\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}\right)-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$ **0.5**

* دراسة اتجاه تغير الدالة φ : الدالة φ قابلة للاشتقاق على **R** . من أجل كل عدد حقيقي x من **R**

$\varphi'(x)=2\left(2x\times e^{-x}+(x^2+1).\left(-e^{-x}\right)\right)=2e^{-x}\left(2x-x^2-1\right)=-2\left(x-1\right)^2e^{-x}$ **0.5**

$\varphi'(x)=0$ تكافئ $\left(x-1\right)^2=0$ أي $x=1$ ومهما يكن x من **R** : $\varphi'(x)\le 0$

الدالة φ متناقصة على **R**. **0.5**

جدول تغيرات φ : **0.25**

x	- ∞		1		+∞
$\varphi'(x)$		-	0	-	
$\varphi(x)$	+∞	↘			-1

2) * نبين أن المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3]

الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على [2 ;3] ،

$\varphi(2)=2\left(2^2+1\right)e^{-2}-1\approx0.35$ ، $\varphi(3)=2\left(3^2+1\right)e^{-3}-1\approx-0.004$ بما أن $\varphi(3)\le0\le\varphi(2)$

حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3] **0.5**

بما أن $\varphi(2.9)\approx0.035$ فإن α ينتمي إلى المجال [2,99 ;3] . **0.25**

* جدول إشارة φ (x) : **0.25**

x	- ∞		α		+∞
$\varphi(x)$		+	0	-	

الجزء الثاني : $f(x)=4x.e^{-x}$ ، $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

1) * المنحنيين (C_f) و (C_g) يشملان مبدأ المعلم O لأن $f(0)=4\times0.e^{-0}=0$ و $g(0)=\dfrac{2\times0}{0^2+1}=0$ **0.25**

* معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة o.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(x)= 4\left(1\times e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)\right)=4(1-x)e^{-x}$ ومنه

$f'(0)= 4(1-0)e^{-0}=4$ معادلة المماس تكتب : y = 4x . **0.5**

* معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة o.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(x)=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه

$g'(0)=\dfrac{2(1-0)}{(0+1)^2}=2$.معادلة المماس تكتب : y = 2x . **0.5**

2) * نبين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)-f(x)=\dfrac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

$$g(x)-f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-4xe^{-x}=\frac{2x-\left(x^2+1\right)4xe^{-x}}{x^2+1}=\frac{-2x\left(2\left(x^2+1\right)e^{-x}-1\right)}{x^2+1}=\frac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$$ **0.25**

* دراسة إشارة g(x) – f(x) : **0.5**

x	- ∞		0		α		+∞
$\varphi(x)$		+		+	0	-	
-2x		+	0	-		-	
$-2x\varphi(x)$		+	0	-	0	+	

* الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطتين O مبدأ المعلم و النقطة التي إحداثياتها (α , 0) .

لما x ينتمي إلى أحد المجالين] - ∞ ; 0 [أو] α ; + ∞ [فإن (C_g) أعلى (C_f).

لما x ينتمي إلى] 0 ; α [فإن (C_g) أسفل (C_f). **0.5**

3) * الدالة h حيث $h(x) = \ln(x^2+1) + (4x+4).e^{-x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على **R**

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}+4e^{-x}+(4x+4).\left(-e^{-x}\right)=\frac{2x}{x^2+1}-4xe^{-x}=g(x)-f(x)$$ **0.5**

نستنتج أن h دالة أصلية للدالة g – f على **R**

* مساحة الحيز المستوي المضلل في الرسم : نسمي S هذه المساحة

$$S=\int_0^{\alpha}\left(f(x)-g(x)\right)dx=-\left[h(x)\right]_0^{\alpha}=-\left[\ln\left(\alpha^2+1\right)+(4\alpha+4)e^{-\alpha}-4\right]=4-\ln\left(\alpha^2+1\right)-(4\alpha+4)e^{-\alpha}$$

قيمة مقربة لـــ S : بأخذ α ≈2.9 نجد $S\approx 1u.a\approx 4cm^2$. **0.5+ 0.5**

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) باستعمال طريقة هورنر (أو القسمةالاقليدية أو المطابقة) نبين أن $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

	3	0	-11	48
-3	0	-9	27	-48
0	3	-9	16	0

نستنتج أن : $3n^3-11n+48=(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$ أي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$. **0.5**

2) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم. :

بما أن $3n^3$ و $9n$ و 16 أعداد طبيعية يكفي أن نبين أن $3n^2-9n+16\succ 0$ لذلك نحسب المميز

بما أن $\Delta=9^2-4\times3\times16=-111$ ، $\Delta\prec 0$ ومعامل n^2 موجب نستنتج أن $3n^2-9n+16\succ 0$. **0.5**

3) * نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n اكبر أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,\mathrm{n}+3\right)=PGCD(48\,,\,\mathrm{n}+3)$

يكفي أن نبين كل قاسم مشترك للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ كذلك قاسم مشترك للعددين $n+3$ و 48 .

أولا : يكون العدد $3n^3-11n$ طبيعيا إذا كان $n\left(3n^2-11\right)\succ 0$ أي $n^2\succ\frac{11}{3}$ أي $n\geq 2$.

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ فإنه يقسم العدد $3n^3-11n-(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$ أي يقسم العدد 48 . **0.5**

عكسيا كل قاسم مشترك d للعددين $n+3$ و 48 يقسم كذلك العدد $(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-48$ أي يقسم العدد $3n^3-11n$. **0.5**

نستنتج أن : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,\mathrm{n}+3\right)=PGCD(48\,,\,\mathrm{n}+3)$

* مجموعة قواسم العدد 48 : نسمي D مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 : بماأن : $48=2^4\times3$ فإن عدد قواسم العدد 48 يساوي 10 نستنتج أن : $D=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$. **0.5**

* مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا إذا كان $n\geq 2$ و $n+3$ قاسما للعدد $3n^3-11n$ ، أي $n+3$ قاسما مشتركا لــ $n+3$ و $3n^3-11n$ حتى يتحقق ذلك يكفي أن يكون $n+3$ قاسما للعدد 48 . **0.5**

نستنتج أن $n+3$ ينتمي إلى D و منه n ينتمي إلى $\{3,5,9,13,21,45\}$ (لاننس أن $n\geq 2$) . **0.5+ 0.5**

ملاحظة : يمكن استعمال الشكل $\frac{3n^3-11n}{n+3}=3n^2-9n+16-\frac{48}{n+3}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

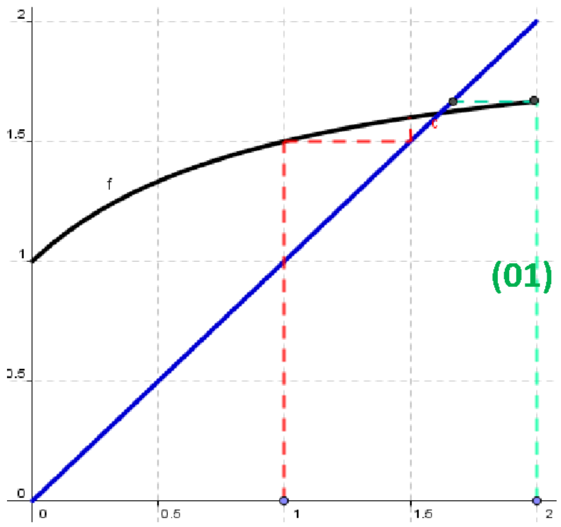
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

أ) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$

ب)بما ان f متزايدة تماما على $[0,2]$

وبما ان $1\le x\le 2$ فان $f(1)\le f(x)\le f(2)$ و منه $\dfrac{3}{2}\le f(x)\le\dfrac{5}{3}$ **(01)**

ومنه $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2}\,,\,\dfrac{5}{3}\right]$ و $\left[\dfrac{3}{2}\,,\,\dfrac{5}{3}\right]\subset[1\,,\,2]$ فان $f(x)\in[1\,,\,2]$



2) $u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ u_\circ=1$

$v_{n+1}=f(v_n)\ ;\ v_\circ=2$

أ) نلاحظ ان (u_n) متتالية متزايدة و (v_n) متناقصة وهما متقاربتان نحو $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ب) إثبات بالتراجع أن $1\le u_n\le 2$ من اجل كل عدد طبيعي n نسمي P(n) هذه الخاصية

* من اجل n = 0 لدينا $u_\circ=1\ ;\ 1\le 1\le 2$

* لدينا $1\le u_\circ\le 2$ فرضية التراجع ومنه $f(1)\le f(u_n)\le 2$ $1\le u_{n+1}\le 2$

وبالتالي من اجل اي عدد طبيعي n $1\le u_n\le 2$ .... **(0.5)**

<u>وكذلك</u> نثبت بالتراجع آن من أجل أي عدد طبيعي n $u_n\le u_{n+1}$

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\dfrac{3}{2}$ و $1\le\dfrac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$

و إذا كان $u_n\le u_{n+1}$ فرضية التراجع فإن $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$ لأن f متزايدة

و بنفس البرهان نجد $1\le v_n\le 2$ و $v_n\ge v_{n+1}$ .... **(01)**

3) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{2v_n+1}{v_n+1}-\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $2\le u_n+1\le 3$ و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$

اذن v_n-u_n , $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الاشارة : .... **(0 .5)**

استعمال التراجع $v_\circ-u_\circ=1$ ومنه $v_\circ-u_\circ\ge 0$ واذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فان $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}<0$ بما ان $v_n-u_n\ge 0$ فان $\dfrac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$ أي

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$. .... **(0.5)**

استعمال التراجع لإثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_\circ-u_\circ=1$ و $\left(\dfrac{1}{4}\right)^\circ$ اذن $v_\circ-u_\circ\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^\circ$ نفرض ان $v_k-u_k\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$ $v_{k+1}-u_{k+1}\le\dfrac{1}{4}(v_k-u_k)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n\le u_{n+1}$ و $v_n\ge v_{n+1}$ معناه

(u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة اذن (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية l .... **(0.5)**

$u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1)=0$ أي $l^2-l-1=0$ ومعناه $l=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ او

$l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ بينما $1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .... **(01)**...

التمرين الثالث (04 نقاط و نصف)

/1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$

$\Delta' = 4-8=-4=4i^2$ إذن $z=2-2i$ أو $z=2+2i$ 0.5

/2 ليكن كثير الحدود $P(z)=z^3+2(\sqrt{2}-2)z^2-8(\sqrt{2}-1)z+16\sqrt{2}$

أ) حساب $P(-2\sqrt{2})$

$$P(-2\sqrt{2})=(-2\sqrt{2})^3+2(\sqrt{2}-2)(-2\sqrt{2})^2-8(\sqrt{2}-1)(-2\sqrt{2})+16\sqrt{2}$$
$$=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}-32+32-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}$$
$$=0$$

0.25....................

باستعمال الخوارزمية هورنر نجد

	$-2\sqrt{2}$		
1	$2(\sqrt{2}-2)$ $-2\sqrt{2}$	$-8(\sqrt{2}-1)$ $8\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$ $-16\sqrt{2}$
1	-4	8	0

0.5...

إذن $a=1$, $b=-4$ و $c=8$

ب) $P(z)=0$ معناه $(z+2\sqrt{2})(z^2-4z+8)=0$

معناه $z=-2\sqrt{2}$ أو $z=2-2i$ أو $z=2+2i$ 0.25

/3 لدينا $z_A=2-2i$, $z_B=2-2i$, $z_C=-2\sqrt{2}$

أ) $z_A=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ || $z_B=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right]$

0.5 + 0.5....................

ومنه $z_A^{2010}=\left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]^{2010}=\left[(2\sqrt{2})^{2010},\ \frac{2010\pi}{4}\right]$

$$z_A^{2010}=\left[(2\sqrt{2})^{2010}\ ;\ 502\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=\left[(2\sqrt{2})^{2010}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]=(2\sqrt{2})^{2010}i$$

0.5.........

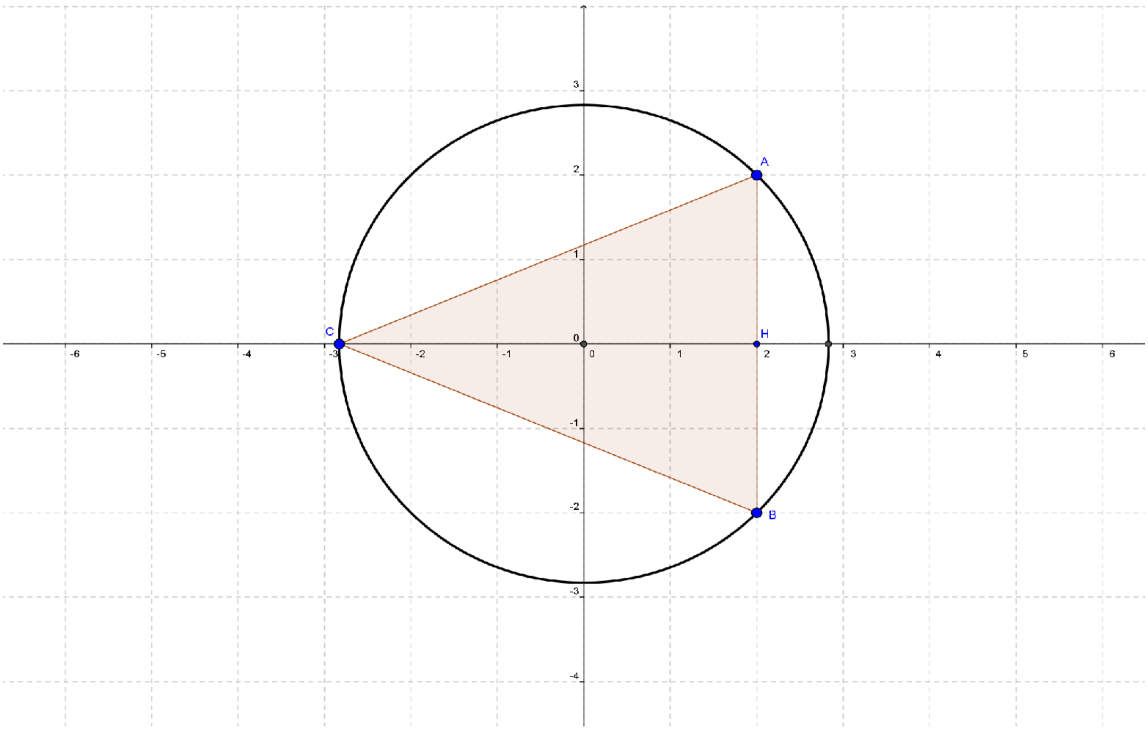
ب) بما أن $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ فان A، B و C تقع على نفس الدائرة التي مركزها o ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ 0.5

جـ) لدينا بعد الحساب $\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\left[1,\frac{\pi}{4}\right]$ أي $\arg\left(\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}\right)=\frac{\pi}{4}$

ومنه $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{4}$ 0.5

وبما ان مجموع زوايا المثلث هو π نجد ان $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{3\pi}{8}$........................ **0.25**

د) من الشكل نلاحظ ان $\tan\frac{3\pi}{8}=\frac{CH}{AH}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$............................... **0.25**



التمرين الرابع : (**6 نقاط ونصف**)

f الدالة العددية المعرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يأتي:

$f(0)=0$ ومن أجل x ينتمي إلى $]0\,;+\infty[$: $f(x)=x^2(1-2\ln(x))$

1) * نهاية f عند $+\infty$: لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن x^2 يؤول إلى $+\infty$ و $1-2\ln(x)$ يؤول إلى $-\infty$

نستنتج أن لما x يؤول إلى $+\infty$ f(x) يؤول إلى $-\infty$ **0.25**

* حساب $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$: لدينا $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2(1-2\ln(x))}{x}=x-2x\ln(x)$ ونعلم أن $\lim_{x\to 0}x\ln(x)=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. **0.25**

التفسير الهندسي : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 والمماس عند هذه النقطة يوازي محور الفواصل **0.25**

* f جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

مهما يكن العدد x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=2x(1-2\ln(x))+x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x-4x\ln(x)-2x=-4x\ln(x)$$ **0.5**

* دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$f'(x)=0$ تكافئ x =0 أو ln(x) =0 أي x = 0 أو x = 1 . **0.25**

$f'(x)\succ 0$ تكافئ $-\ln(x)\succ 0$ أي $\ln(x)\prec 0$ تكافئ $0\prec x\prec 1$ **0.25**

$f'(x)\succ 0$ تكافئ $x\succ 1$ **0.25**

نستنتج أن f متزايدة على $]0;1[$ ومتناقصة على المجال $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f : **0.5**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

2) * إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل : هي النقط التي إحداثياتها (x ,0) حيث x حلا للمعادلة f(x) = 0 .

المعادلة f(x) = 0 تكافئ $x^2(1-2\ln(x))=0$ أي x =0 أو $1-2\ln(x)=0$ **0.25**

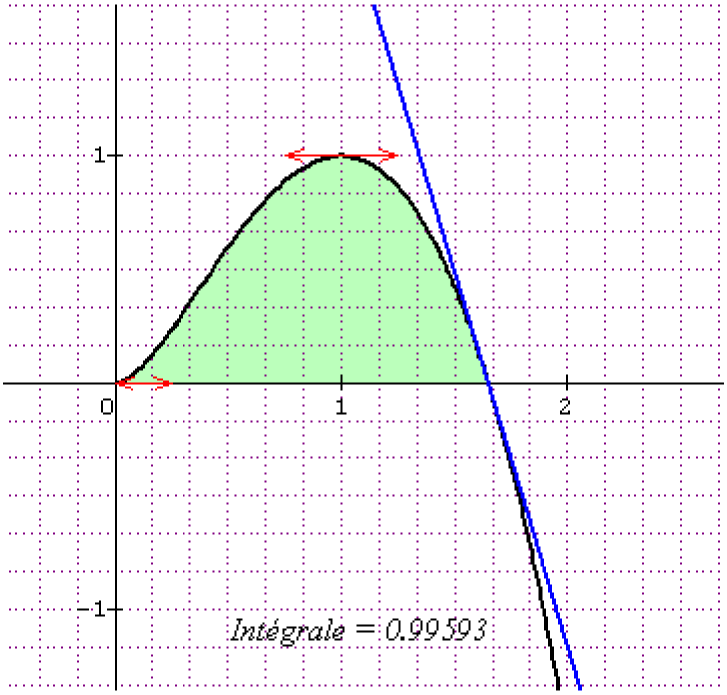
نستنتج أن x = 0 و $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. نقطتي التقاطع هما : (0 , 0) و $(\sqrt{e},0)$. **0.5**

* معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$:

تكتب هذه المعادلة : $y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$

بما أن $f'(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\ln(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\times\frac{1}{2}=-2\sqrt{e}$ و $f(\sqrt{e})=0$ نستنتج أن $y=-2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})$ **0.5**

* رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ والمماس (d) .



0.75

3) * الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\frac{x^3}{9}(5-6\ln(x))$ دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ومن جل كل عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x)=3\frac{x^2}{9}(5-6\ln(x))+\frac{x^3}{9}\left(-6\frac{1}{x}\right)=\frac{5x^2}{3}-\frac{2x^2}{3}-2x^2\ln(x)=x^2-2x^2\ln(x)$$ 0.5

$$=x^2\left(1-2\ln(x)\right)=f(x)$$

نستنتج أن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$.

* حساب المساحة $S(\lambda)$: $S(\lambda)=\int_\lambda^{\sqrt{e}} f(x)dx=\left[g(x)\right]_\lambda^{\sqrt{e}}=g(\sqrt{e})-g(\lambda)$ 0.5

$$g(\sqrt{e})=\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3}{9}\left(5-6\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)=\frac{e\sqrt{e}}{9}\left(5-6\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}$$ و $$g(\lambda)=\frac{\lambda^3}{9}\left(5-6\ln(\lambda)\right)$$

نستنتج أن : $S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}-\frac{\lambda^3}{9}\left(5-6\ln(\lambda)\right)$ 0.5

* بما أن $\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda^3}{9}\left(5-6\ln(\lambda)\right)=\lim_{\lambda\to0}\left(\frac{5\lambda^3}{9}-\frac{2\lambda^2}{3}\times\lambda\ln(\lambda)\right)=0-0=0$

نستنتج أن $\lim_{\lambda\to0}S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}u.a=\frac{2e\sqrt{e}}{9}\times9cm^2=2e\sqrt{e}\ cm^2$ 0.5