ثانوية الشهيد محمد بوعايسي - الشلف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات
السنة الدراسية: 2009-2010

الشعبة: 3 ر + 3 ت ر | التاريخ : 2010/05/24 | المدة: 4 ساعات ونصف

الموضوع الأول

التمرين الأول :

لكل جملة من الجمل الآتية قدم برهانا إذا كانت صحيحة ومثالا مضادا إذا كانت خاطئة

1) العدد الطبيعي 2009 أولي .

2) العددان 2009 و 1430 أوليان فيما بينهما.

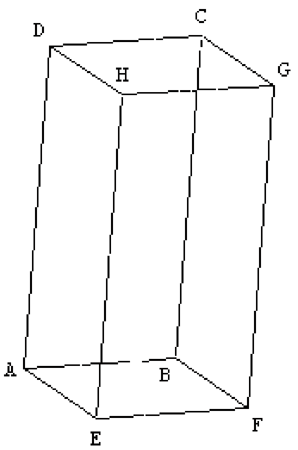
3) المعادلة $2009x + 21y = 7$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

4) حلول المعادلة $24x + 35y = 9$ في $\mathbb{Z}^2$ هي الثنائيات $(70k-144 ; 99-24k)$ حيث k عدد صحيح .

5) يوجد نظام تعداد يكتب فيه العدد 2009 على الشكل $\overline{809}$.

التمرين الثاني : ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث : $AB = AE = 2$ و $AD = 4$. نسمي I مركز المربع ABFE و J منتصف القطعة [EH] . ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس

$$\left(A ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$



1) * عين إحداثيات كل نقطة من النقط B ، C ، E ، F ، H ثم I و J .

* عين مركبات كل شعاع من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{JC}$

* بين أن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ شعاع ناظم للمستوي (IJC) .

* عين معادلة ديكارتية للمستوي (IJC) ثم تحقق أن النقط B ، C ، E ، H تنتمي إليه .

2) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$MB^2 + MC^2 + ME^2 + MH^2 = 48$$

* بين أن (Γ) سطح كرة يطلب تحديد إحداثيات مركزها ω ونصف قطرها .

* تحقق أن النقطة ω مركز ثقل المثلث IJC .

* عين نصف القطر و إحداثيات مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمستطيل EBCH .

* استنتج تمثيلا ديكارتيا للدائرة (γ) .

التمرين الثالث:

1) حل في مجموعة العداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2+z+1=0$.

نسمي j الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

2) اكتب العددين j و $\frac{1}{j}$ على الشكل الأسي.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.نعتبر النقطتين A لاحقتها $\alpha = 2+i$ و M لاحقتها z . نسمي B النقطة ذات اللاحقة $\beta = \alpha j$ و M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$

- عبر عن z' لاحقة M' بدلالة z و j .
- اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$.
- عين طويلة وعمدة العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$. فسر النتيجتين هندسيا .
- عين على الرسم النقطتين B و M' لما $z=1+3i$.

التمرين الرابع :

الجزء الأول: φ الدالة العددية المعرفة على **R** كمايلي $\varphi(x) = 2(x^2+1).e^{-x} - 1$

1) * احسب نهاية φ عند ∞- و عند ∞ + .

*ادرس اتجاه تغيرات الدالة φ ثم أنجز جدول تغيراتها

2) * بين أن المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3] ثم عين حصر للعدد α سعته 10^{-1}.

* أنجز جدول إشارة φ(x) .

الجزء الثاني : (دراسة وضعية منحنيين و حساب مساحة)

تعطى في آخر الموضوع التمثيلين البيانيين ، الأول للدالة f و الثاني للدالة g المعرفتين على **R** كما يلي : $f(x) = 4x.e^{-x}$ و $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

نسمي (C_f) منحنى f و (C_g) منحنى g . في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : 2cm)

1) *بين أن المنحنيين يشملان النقطة o مبدأ المعلم.

* اكتب معادلة المماس لكل من (C_f) و (C_g) عند النقطة o.

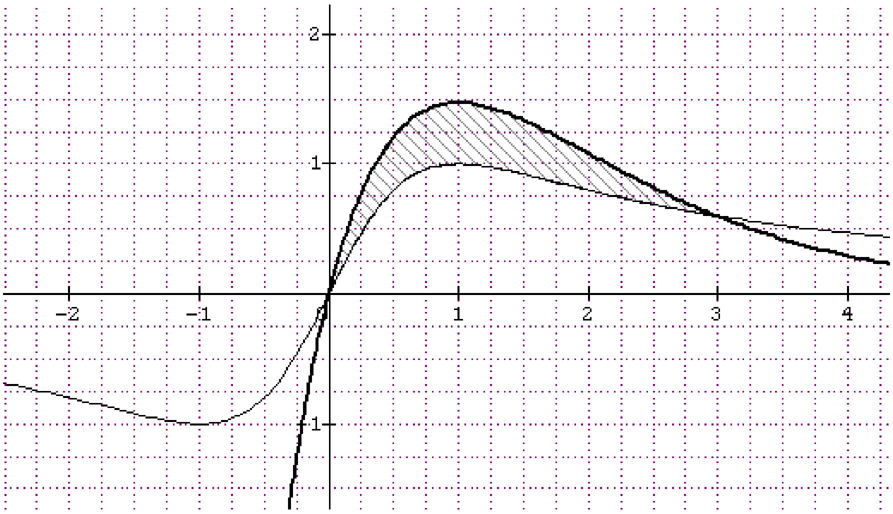
2) *بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)-f(x) = \frac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$ ، حيث φ الدالة المدروسة في الجزء الأول.

* ادرس إشارة g(x) – f(x)

* استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

3) * بين أن الدالة h المعرفة على **R** كمايلي : $h(x) = \ln(x^2+1) + (4x+4).e^{-x}$ دالة أصلية للدالة g(x) – f(x) على **R**.

*استنتج القيمة المضبوطة ثم التقريبية إلى الوحدة لمساحة الحيز المستوي المضلل في الرسم



ثانوية الشهيد محمد بوعايسي - الشلف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات
السنة الدراسية: 2009-2010

الشعبة: 3 ر + 3 ت ر	التاريخ : 2010/05/24	المدة: 4 ساعات ونصف

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم.

3) * بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n اكبر أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,n+3\right)=PGCD(48\,,\,n+3)$

($PGCD(a\,,b)$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a و b)

* عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 .

* استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

التمرين الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.

مثل منحني الدالة والمستقيم ذي المعادلة $y=x$. أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي n :

" $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ "

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l.
- عين القيمة المضبوطة للعدد l .

التمرين الثالث: 1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة التالية: $z^2 - 4\bar{z} + 8 = 0$.

2) نعتبر، في المجموعة $\mathbb{C}$، كثير الحدود التالي : $p(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-2)z^2 - 8(\sqrt{2}-1)z + 16\sqrt{2}$.

ا) احسب $p(-2\sqrt{2})$، ثم عيّن العددين الحقيقيّين a و b بحيث : $p(z)=(z+2\sqrt{2})(z^2+az+b)$.

ب)حل، في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلة $p(z) = 0$.

3) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\overline{OI},\overline{OJ})$.

لتكن النقط A، B، C التي لواحقها $z_A = 2+2i$، $z_B = 2-2i$، $z_C = -2\sqrt{2}$ على الترتيب .

ا) عيّن طويلة وعمدة كلٍّ من z_A و z_B، ثم تحقق أنّ العدد z_A^{2010} تخيلي صرف.

ب) بيّن أنّ النقط A، B، C تقع على نفس الدائرة (c) التي مركزها المبدأ O و التي يطلب تعيين نصف قطرها.

جـ)علّم النقط A، B، C، ثم عيّن قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$ واستنتج أنّ $\frac{3\pi}{8}$ هو قيس للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

د) بيّن أنّ: $\tan\frac{3\pi}{8} = 1+\sqrt{2}$.

التمرين الرابع : f الدالة العددية المعرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يأتي:

f(0)=0 ومن أجل x ينتمي إلى $]0\,;+\infty[$: $f(x)=x^2(1-2\ln(x))$

نسمي (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) * احسب نهاية f عند $+\infty$

* بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ ، فسر النتيجة هندسيا

*بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ وأن $f'(x)=-4x\ln(x)$ (f' ترمز للدالة المشتقة لـــ f)

* ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) * عين إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

* اكتب معادلة للمماس (d) لــ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

* أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (d) . (الوحدة : 3 cm)

3) * بين أن الدالة g المعرفة بـــ $g(x)=\frac{x^3}{9}(5-6\ln(x))$ دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$.

* λ عدد حقيقي من المجال $]0\,;\sqrt{e}[$. احسب بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\lambda$ و $x=\sqrt{e}$.

- احسب نهاية $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى 0 .