الموضوع الأول

التمرين الأول: الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$S(1,1,1)$; $C(9,-1,-2)$; $B(1,1,0)$; $A(1,2,-1)$

ومعادلة للمستوي (ABC) هي $x+2y+2z-3=0$

1/ التمثيل الوسيطي لـ (AB) هو $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=2t \end{cases}$ لان إحداثي كل من A و B تحقق الجملة

2/إحداثي S' نظيرة S بالنسبة للمستوي (ABC) هي $\left(\frac{5}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$

3/المثلث ABC قائم لان $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{74}$; $BC=\sqrt{72}$ و $AC^2=AB^2+BC^2$

4/ مجموع النقط M هي سطح كرة يشمل S لأن لدينا $G(9,0,-3)$ مرجح الجملة $\{(A,1)(B,-1)(C,1)\}$ و $MG=9$ وكذا $SG=9$

التمرين الثاني

الجزء الاول

لتكن المعادلة $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0 \leftarrow (1)$

1/ إثبات أن i حل المعادلة (1)

لدينا $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=0$

2/ باستعمال خوارزمية HORNER نجد a=1 , b= - 4 ; c=13

	i		
1	$-4-i$	$13+4i$	$-13i$
	i	$-4i$	$13i$
1	- 4	13	0

3/ (1) يكافئ $\begin{cases} z=1 \\ z^2-4z+13=0 \end{cases}$

$\Delta'=4-13=-9=9i^2$ ومنه $z=2-3i$!ŭ $z=2+3i$

الجزء الثاني

$z_C=2-3i$; $z_B=2+3i$; $z_A=i$

1/ إيجاد $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالدوران $r\left(B\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$

لدينا $z_{A'}-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_B)$ يكافئ $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_A)+z_B$ يكافئ $z_{A'}=\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)(-2-2i)+2+3i$

ومنه $z_{A'}=-\left(\sqrt2+\sqrt2 i\right)(1+i)+2+3i=-\left(2\sqrt2 i\right)+2+3i=2+\left(3-2\sqrt2\right)i$

2/ لدينا $Z_A-Z_B=-2-2i$ لاحقة $\overrightarrow{AB}$ و $Z_A-Z_C=-2+4i$ لاحقة $\overrightarrow{AC}$

ومنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ أي C,B ,A ليست في استقامية

العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه B ويحول النقطة C إلى A'

لدينا $\overrightarrow{BA'}=k\ \overrightarrow{BC}$ ومنه $\|\overrightarrow{BA'}\|=|k|\times\|\overrightarrow{BC}\|$ ومنه $|k|=\frac{BA'}{BC}=\frac{2\sqrt2}{6}=\frac{\sqrt2}{3}$ أي $k=-\frac{\sqrt2}{3}$!ŭ $k=\frac{\sqrt2}{3}$

وبما أن $\overrightarrow{BA'}$; $\overrightarrow{BC}$ لهما نفس الاتجاه فان $k=\frac{\sqrt2}{3}$ بالتالي $Z'=\frac{\sqrt2}{3}Z+\left(1-\frac{\sqrt2}{3}\right)Z_B=\frac{\sqrt2}{3}Z+\left(1-\frac{\sqrt2}{3}\right)(2+3i)$

التمرين الثالث

(U_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=0$; $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$

1/ إثبات بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\le 0$

نسمي P(n) هذه خاصية

ا) نتحقق من صحة P(0) لدينا $u_0=0$ و $-1<0\le 0$ اي P(0) صحيحة

ب) نفرض أن P(n) صحيحة أي $-1<u_n\le 0$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-1<u_{n+1}\le 0$?

لدينا $-1<u_n\le 0$ ومنه $2<u_n+3\le 3$ ومنه $\frac{1}{3}<\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{2}$ ومنه $-2<\frac{-4}{u_n+3}\le-\frac{4}{3}$

ومنه $-1<u_{n+1}\le-\frac{1}{3}$ ومنه $-1<u_{n+1}\le 0$

/2 دراسة رتابة (U_n)

لدينا $u_{n+1}-u_n = 1-u_n-\dfrac{4}{u_n+3} = \dfrac{(1-u_n)(u_n+3)-4}{u_n+3} = -\dfrac{(u_n+1)^2}{u_n+3} \prec 0$ لأن $2<u_n+3\le 3$ و $(u_n+1)^2 \ge 0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة . و بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة فهي متقاربة .

/3 نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$

ا) إثبات أن (v_n) حسابية لدينا $v_{n+1}-v_1 = \dfrac{1}{u_{n+1}+1}-\dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{1}{1-\dfrac{4}{u_n+3}+1}-\dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{u_n+3-2}{2(u_n+1)} = \dfrac{1}{2}$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=1$

ب) $v_n = 1+\dfrac{n}{2}$; $u_n = \dfrac{1-v_n}{v_n} = \dfrac{-\dfrac{n}{2}}{1+\dfrac{n}{2}}$ ومنه $u_n = -\dfrac{n}{n+2}$

هـ) لدينا $\lim u_n = \lim\left(-\dfrac{n}{n+2}\right) = -1$; أي (U_n) مقاربة نحو -1

4) نضع $S_n = \dfrac{1}{n^2}(v_0+v_1+............+v_n)$

لدينا $v_0+v_1+...+v_n = \dfrac{n+1}{2}(v_0+v_n) = \dfrac{n+1}{2}(1+1+\dfrac{n}{2}) = \dfrac{1}{4}(n+1)(n+4)$ ومنه $S_n-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(n+1)(n+4)}{n^2}-1\right] = \dfrac{5n+4}{4n^2}$

لدينا من جهة $\dfrac{5n+4}{4n^2}-\dfrac{3}{n} = \dfrac{4-7n}{4n^2} \prec 0$ أي $S_n-\dfrac{1}{4} < \dfrac{3}{n}$

ومن جهة أخرى $\dfrac{5n+4}{4n^2}+\dfrac{3}{n} = \dfrac{17n+4}{4n^2} \succ 0$ أي $S_n-\dfrac{1}{4} > -\dfrac{3}{n}$ وبالتالي $\left|S_n-\dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{3}{n}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{n}\right) = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\dfrac{1}{4}\right) = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$

التمرين الرابع

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x+1+e^{-x}$

1/ أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1+e^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} = \left[x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)\right] = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) $f'(x) = 1-e^{-x}$

نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $\mathbb{R}$ $f(x)>0$

x	-∞		0		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	2	↗	+∞

/2 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \ln(x+1+e^{-x})$

أ) دراسة تغيرات الدالة g

$g'(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

وبما ان $x+1+e^{-x}>0$ فان إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$

x	-∞		0		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	+∞	↘	ln2	↗	+∞

ب) - إثبات أن $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)+x] = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)+x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(x+1+e^{-x})+\ln(e^{x})\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(x+1)e^{x}+1\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(xe^{x}+e^{x}+1)\right] = \ln(1) = 0$

ومنه المنصف الثاني هو المستقيم مقارب مائل لـ(c_g) من جهة $-\infty$

- إثبات أن $g(x)+x<0$ من اجل x<-1

لدينا $g(x)+x=\ln\left[(x+1)e^{x}+1\right]$

ومن اجل $x<-1$ فان $x+1<0$ ومنه $(x+1)e^{x}<0$ ومنه $(x+1)e^{x}+1<1$ أي $\ln\left[(x+1)e^{x}+1\right]<0$

وبالتالي $g(x)+x<0$ أي من اجل x<-1 المنحنى يقع تحت المقارب المائل

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\ln x\right]$

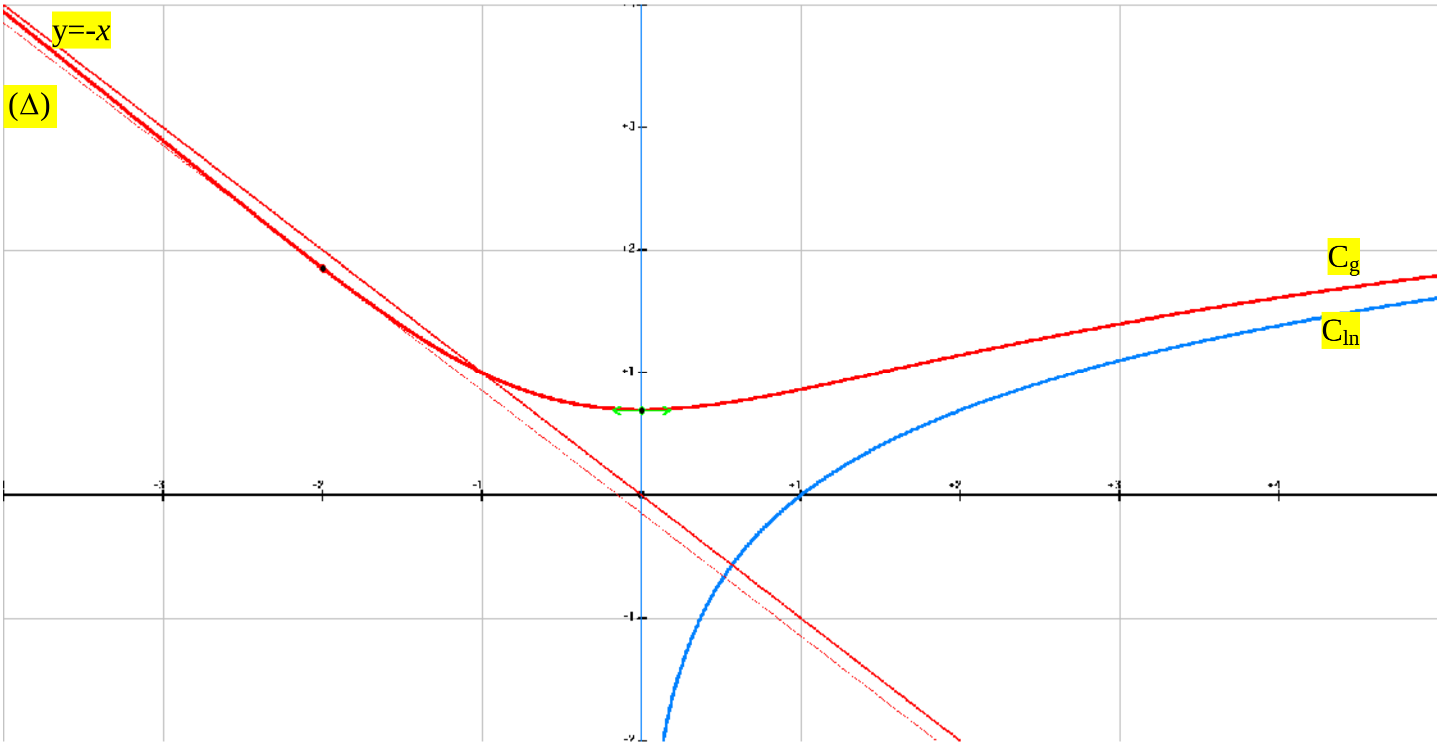
$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x+1+e^{-x}\right)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^{x}}\right)\right]=\ln(1)=0$$

أي المنحنى $(C_{\ln})$ هو منحنى مقارب لـ (C_f) من جهة $(+\infty)$

- كتابة معادلة (Δ) مماس لـ (c_g) في النقط ذات الفاصلة 2-

$$y=g'(-2)(x+2)+g(-2)$$
$$=-1(x+2)+\ln(e^{2}-1)$$
$$=-x-0.15$$

مع $\begin{cases} g'(-2)=-1 \\ g(-2)=\ln(e^{x}-1) \end{cases}$



- المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x+1+e^{-x}(1-e^{m})=0 \leftarrow (E)$

(E) يكافئ $g(x)=-x+m$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (c_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$

من اجل $m\in\left]-\infty\ ,\ -0.15\right[$ المعادلة لا تقبل حل في $\mathbb{R}$

من اجل $m=-0.15$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

من اجل $m\in\left]-0.15\ ;\ 0\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين

من اجل $m\in\left[0,\ln 2\right[$ المعادلة تقبل حل سالب

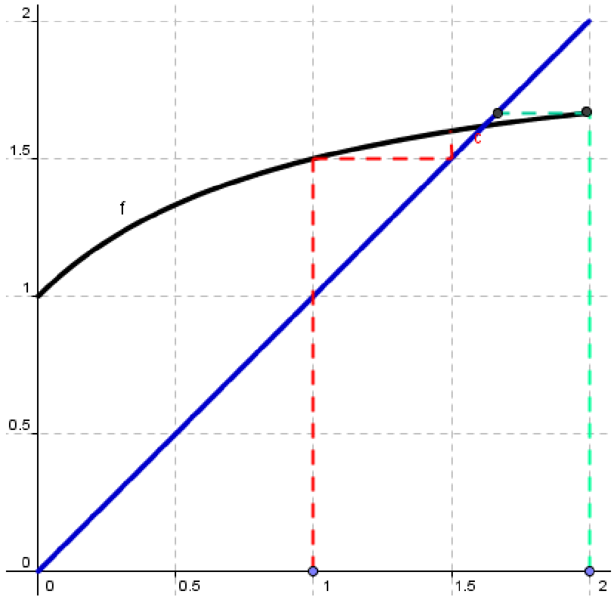
من اجل $m=\ln 2$ المعادلة تقبل حل معدوم

من اجل $m\in\left]\ln 2\ ;\ +\infty\right[$ المعادلة (E) تقبل حل موجب

3/ التاكد ان f هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=x+2$

لدينا $f'(x)+f(x)=1-e^{-x}+x+1+e^{-x}=x+2$ ومنه f هي حل للمعادلة التفاضلية .

الموضوع الثاني



التمرين الأول

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

أ) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$

ب) بما ان f متزايدة تماما على $[0,2]$

وبما ان $1\le x\le 2$ فان $f(1)\le f(x)\le f(2)$ و منه $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$

ومنه $f(x)\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$ و $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]\subset[1,2]$ فان $f(x)\in[1,2]$

(2 $u_{n+1}=f(u_n)$; $u_0=1$

$v_{n+1}=f(v_n)$; $v_0=2$

أ) نلاحظ ان (u_n) متتالية متزايدة و (v_n) متناقصة وهما متقاربتان نحو $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و هو حل للمعادلة $f(x)=x$

ب) إثبات بالتراجع أن $1\le u_n\le 2$ من اجل كل عدد طبيعي n نسمي P(n) هذه الخاصية

* من اجل n = 0 لدينا $u_0=1$; $1\le 1\le 2$

* لدينا $1\le u_n\le 2$ فرضية التراجع ومنه $f(1)\le f(u_n)\le 2$ $1\le u_{n+1}\le 2$

وبالتالي من اجل اي عدد طبيعي n $1\le u_n\le 2$

وكذلك نثبت بالتراجع آن من أجل أي عدد طبيعي n $u_n\le u_{n+1}$

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ و $1\le\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$

و إذا كان $u_n\le u_{n+1}$ فرضية التراجع فإن $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$ لأن f متزايدة

و بنفس البرهان نجد $1\le v_n\le 2$ و $v_n\ge v_{n+1}$

4) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $2\le u_n+1\le 3$

و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$

إذن v_n-u_n , $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة :

استعمال التراجع $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فان $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه $0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$

بما ان $v_n-u_n\ge 0$ فان $\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

استعمال التراجع لإثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0-u_0=1$ و $1\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$ اذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$ نفرض ان $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ اذن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

وحسب السؤال 3) لدينا $u_n\le u_{n+1}$ و $v_n\ge v_{n+1}$ معناه (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

اذن (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية l .

$u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1\right)=0$ أي l^2 -l-1=0 ومعناه $l=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

او $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ بينما $1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

التمرين الثاني

1) حل المعادلة $2z+\overline{z}=9i\leftarrow(1)$ نضع $z=x+iy$ $\overline{z}=x-iy$

(1)يكافئ $2x+2iy+x-iy=9i$ يكافئ 3 x + i y =9i ومنه x = 0 و y = 9 ومنه z = 9 i

طريقة2) بتعويض الحلول في المعادلة (1) نجد z = 9 i الذي يحقق

2) $|z+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ و $|i\,\overline{z}+1|-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ اي $|z+i|=|i\,\overline{z}+1|$

3) $\arg(z)=\theta$ $\arg\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}\right)=\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\arg(\overline{z})$

$$=\frac{2\pi}{3}+\theta$$

4) $\sqrt{3}+i=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\left[2\ ,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ ومنه $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left[2^n\ ,\ \dfrac{n\pi}{6}\right]$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^n$تخيلي معناه $\cos\dfrac{n\pi}{6}=0$ معناه $k\in\mathbb{N}$ $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $n=6k+3/k\in\mathbb{N}$

5) Z_A =i و Z_B = -1

$|z-i|=|z+1|$ يكافئ x^2 + (y-1)^2=(x+1)^2+y^2

يكافئ x^2 + y^2-2y+1=x^2+y^2+2x+1 يكافئ y=-x اي العمودي على (AB) والمار بـ O

طريقة2) لتكن M(z) حيث $|z-i|=|z+1|$ معناه M تبعد بنفس المسافة على النقطتين A وB أي Mهي محور القطعة $[AB]$

التمرين الثالث

$A(1,1,0)$; $B(1,2,1)$; $C(3,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$; $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$ لا يوجد عدد حقيقي k منه $\overrightarrow{AB}=k\times\overrightarrow{AC}$

منه A،B وC ليست في استقامة أي تعين مستو

بالتعويض عن إحداثيات كل من A،B وC في المعادلة $2x+y-z-3=0$ نجدها تحقق معادلة (ABC) هي $2x+y-z-3=0$

$(P):x+2y-y-4=0$ $\vec{n}(1,2,-1)$

$(P'):2x+3y-2y-5=0$ $\vec{n'}(2,3,-2)$

نلاحظ آن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا ان (p) و (p') يتقاطعان وفق المستقيم d تمثيله الوسيطي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}$

أ) لدينا -2+t+6-t-4=0 معناه 0t=0 و هي تقبل حل من اجل أي عدد حقيقي t ومنه (d) محتوى في (D)

ب) ولدينا 2(-2+t)+9-2t-5=0 معناه 0t=0 و هي تقبل حل من اجل أي عدد حقيقي t ومنه (d) محتوى في (p')

من (ا) و(ب) نقول ان (d) = $(p)\cap(p')$

$\begin{cases}x+2y-y-4=0\\ 2x+3y-2y-5=0\\ 2x+y-z-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\begin{cases}x=2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}\\ 2x+y-z-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\begin{cases}x=-2+t\\ y=3\\ z=t\end{cases}\\ 2(-2+t)+3-t-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}t=4\\ x=2\\ y=3\\ z=4\end{cases}$

التمرين الرابع

f دالة معرفة على $\left[0,+\infty\right[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(3-2\ln\ x\right)+1 \quad , & x\in\left]0,+\infty\right[\\ f(0)=1 \end{cases}$$

(c_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

الجزء الاول

1) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln\ x)+1\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right]=1$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة x=0 (محور التراتيب) ليس مستقيم مقارب لــ (c_f)

$$\lim_{x\to\infty} f\ \ln=-\infty$$

2) ا) دراسة قابلية اشتقاق f عند 0

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h(3-\ln\ h)\right)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}(3h-h\ \ln(h))\right]=0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين والمنحنى (c_f) يقبل نصف مماس يوازي (x x')

ب)بما أن الدالة f معرفة على $\left[0,+\infty\right[$ وقابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين فهي قابلة للاشتقاق على $\left[0,+\infty\right[$ ولدينا

$$f'(x)=3x-x^2\times\frac{1}{x}-2x\ \ln\ x=2x-2x\ln x\ ==2x(1-\ln x)$$

إشارة f' (x) في المجال $\left[0,+\infty\right[$ من إشارة $(1-\ln x)$

جدول التغيرات

x	0		e		+∞
f'(x)		+	0	—	
f(x)	1	$\nearrow$	1+e²/2	$\searrow$	-∞

3) اثبات ان المعادلة $f(x)$ تقبل حل وحيد α في مجال $\left[0,+\infty\right[$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[0,+\infty\right[$

وتأخذ قيمتها في المجال $\left]-\infty\ ,\ 1+\frac{e^2}{2}\right]$ فهي إذن تقبل حل وحيد α

في مجال $\left[0,+\infty\right[$ ولدينا $f(4,6)\approx 0,45$ و$f(4,7)\approx -5,07\times 10^{-2}$ اي$f(4,6)\times f(4,7)<0$ ومنه $4,6<\alpha<4,7$

4/ معادلة للمماس (D) لــ(c_f) عند النقطة ذات فاصلة 1

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=2(x-1)+\frac{5}{2}$$
$$=2x+\frac{1}{2}$$

$$\begin{Vmatrix} f'(1)=2 \\ f(1)=\dfrac{5}{2}\end{Vmatrix}$$

5/ g دالة معرفة على مجال $\left]0,+\infty\right[$ بـ: $g(x)=f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$

ا) حساب g'(x) و g''(x)

$$g'(x)=f'(x)-2=2x(1-\ln(x))-2$$
$$g''(x)=f''(x)=-2\ln(x)$$

من اجل , $g'(x)<0$ $x\in\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

ومن اجل $x=1$ $g'(x)=0$

بـــ/ دراسة تغيرات الدالة g

x	0		1		+∞
g''(x)		+	0	—	
g'(x)	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-∞

x	0		1		+∞
g'(x)		—	0	—	
g(x)	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-∞

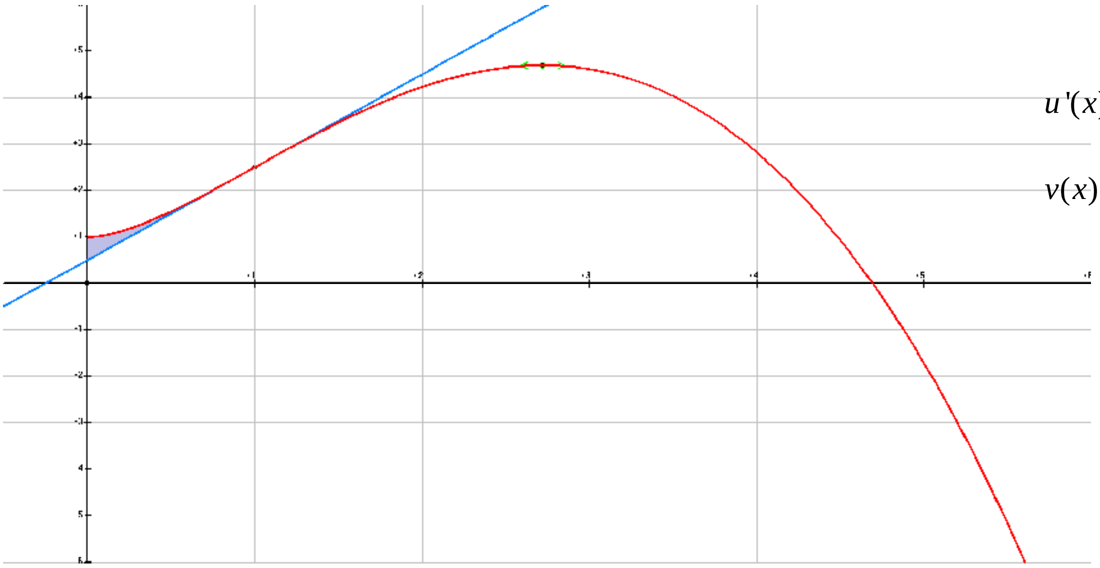
وضعية (c_f) بالنسبة الى (D)

حساب $f(6)$ $f(6)\approx -9,5$

x	0		1		+∞
f(x)-2x-1/2		+	0	—	

الجزء الثاني

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$$



1) نضع $u(x) = \ln x$ ، $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ ومنه $v'(x) = x^2$ ، $v(x) = \dfrac{1}{3}x^2$

$$I_n = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \frac{1}{9} + \frac{\ln n}{3n^3} + \frac{1}{9n^3}$$

(2

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[f(x) - (2x + \frac{1}{2}) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) - x^2 \ln x \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - I_n$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n \;\; U.A$$

$$\mathrm{A(n)} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{9} + \frac{\ln n}{9n^3} + \frac{1}{9n^3} \quad U.A = \frac{1}{9} - \frac{7}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{9n^3} \;\; U.A$$

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{7}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{9n^3} \right) \approx \frac{1}{9} \, U.A$$

$$\approx \frac{4}{9} cm^2$$