C الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا (u_n) متتالية عددية معرفة بــ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1) أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n>4$.

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=6$ و $6>4$ ومنه $u_0>4$ أي الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n>4$ و نبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن :

$u_{n+1}>4$

لدينا : $u_n>4$ ومنه $\frac{1}{4}u_n>\frac{1}{4}\times4$ وبالتالي $\frac{1}{4}u_n+3>\frac{1}{4}\times4+3$ إذن $u_{n+1}>4$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

أي $u_n>4$ من أجل كل عدد طبيعي n

ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

- ندرس اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$:

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{4}u_n+3$

- ولدينا : $u_n>4$ ومنه $-\frac{3}{4}u_n<-\frac{3}{4}\times4$ وبالتالي $-\frac{3}{4}u_n+3<-\frac{3}{4}\times4+3$

ومنه $u_{n+1}-u_n<0$ **أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما**

- **استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :**

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>4$ **إذن** (u_n) متتالية محدودة من الأسفل بالعدد 4.

و (u_n) **متناقصة تماما** وبالتالي **(u_n) متقاربة تتقارب من العدد 4**

تعيين نهاية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$

2) لدينا : $v_n=\ln(u_n-4)$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية :

(v_n) **متتالية حسابية معناه** $v_{n+1}=v_n+r$

- لدينا : $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-4)=\ln\left(\frac{1}{4}u_n+3-4\right)$

أي $v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n+12-16}{4}\right)=\ln\left(\frac{u_n-4}{4}\right)$ ومنه

$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n-4}{4}\right)=\ln(u_n-4)-\ln(4)=v_n-\ln(4)$ أي $v_{n+1}=v_n-\ln(4)$

ومنه (v_n) **حسابية أساسها** $r=-\ln(4)$ **و حدها الأول** $v_0=\ln(u_0-4)=\ln(6-4)=\ln(2)$

ب) حساب عبارة الحد العام v_n **بدلالة** n:

- **لدينا :** $v_n=v_0+nr=\ln(2)-n\ln(4)$ $v_n=-2n\ln(2)+\ln(2)$

- **استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي** n، $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$:

لدينا : $v_n=\ln(u_n-4)$ ومنه $e^{v_n}=u_n-4$

وبالتالي : $u_n=e^{-n\ln 4+\ln(2)}+4=e^{n\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\times e^{\ln(2)}+4=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$ أي $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n):

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4\right)=4$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ $-1<\frac{1}{4}<1$

د) حساب المجموع بدلالة n: $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\dots+u_n$.

- **لدينا :** $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$ وهي عبارة عن مجموع متتاليتين عدديتين

- **متتالية هندسية** (w_n) عبارة حدها العام $w_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $w_0=2$

- **ومتتالية ثابتة** (a_n) عبارة حدها العام $a_n=4$

إذن : $S_n=w_0+w_1+\dots+w_n+a_0+a_1+\dots+a_n=w_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+4(n+1)$

$S_n=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)+4(n+1)$ ومنه $S_n=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)+4(n+1)$

أي $S_n=2\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4(n+1)$

$$S_n=\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4n+4=\frac{8}{3}+4-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+4n=\frac{20}{3}+4n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\boxed{S_n=\frac{20}{3}+4n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا : $P(z)=z^3-z^2+3z+5$

1) تبيان العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$:

لدينا : $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+3(-1)+5=-1-1-3+5=0$

أي $P(-1)=0$ ومنه العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$:

- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

لدينا :
$$P(z)=(z+1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+z^2+az+b$$
$$P(z)=z^3+(a+1)z^2+(b+a)z+b$$

- بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a+1=-1\\ b+a=3\\ b=5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-2\\ b=5\end{cases}$

وبالتالي : $P(z)=(z+1)(z^2-2z+5)$

2) حل المعادلة $z^2-2z+5=0$ في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$:

- حساب المميز $\Delta=(-2)^2-4(1)(5)=4-20=-16=16i^2$
- أي $\Delta=16i^2=(4i)^2$ ومنه الجذران التربيعيان للعدد Δ هما : $\delta_1=4i$, $\delta_2=-4i$

المعادلة $z^2-2z+5=0$ تقبل حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{2+4i}{2}=1+2i \quad ، \quad z_2=\frac{-b-\delta_1}{2a}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

- استنتاج حلول المعادلة $P(z)=0$:
- $P(z)=0$ معناه $(z+1)(z^2-2z+5)=0$

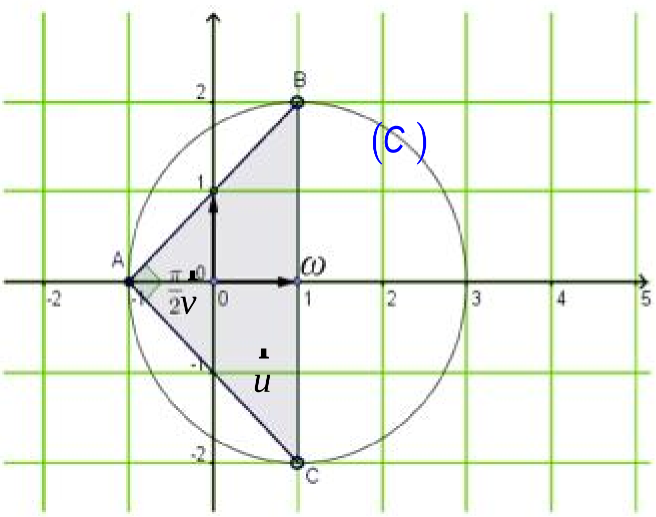
اما $z+1=0$ ومنه $z=-1$

أو $z^2-2z+5=0$

إما $z_1=1+2i$ أو $z_2=1-2i$

مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$:

$$S=\{-1,1+2i,1-2i\}$$



3) لدينا : $z_A=-1$, $z_B=1+2i$, $z_C=1-2i$

أ) تعليم النقط A,B,C :

ب) تعيين الطويلة و عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

- كتابة العدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1-2i+1}{1+2i+1} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{2i}{2} = -i$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i}$$

- حساب الطويلة : $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-i| = \sqrt{(-1)^2} = 1$

- تعيين عمدة للعدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

نضع $\theta = Arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ إذن $\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = -1\end{cases}$ ومنه $\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB} = 1$ ومنه $AB = AC$

ولدينا : $Arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

أي $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ومنه ABC مثلث قائم في النقطة A و متساوي الساقين .

ج) تعيين طبيعة التحويل S :

- التحويل S من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و $b = -1-i$

لدينا : $\boxed{|a| = 1 \text{ ومنه } S \text{ دوران زاويته } \theta = Arg(a) = -\dfrac{\pi}{2}}$

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-1-i}{1-(-i)} = \dfrac{-1-i}{1+i} = -\dfrac{1+i}{1+i} = -1$

$$z_\Omega = -1 = z_A$$

لان $a = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$ $\boxed{\text{ومنه مركز } S \text{ هي النقطة } A}$

- إثبات أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتحويل S :

نبين أن $z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B - 1 - i = -iz_B - 1 - i$

- لدينا : $e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B - 1 - i = -i(1+2i) - 1 - i = -i + 2 - 1 - i = 1 - 2i = z_C$

ومنه C هي صورة النقطة B بالتحويل S

4) أ) إثبات أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (C):

- لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ومنه $A \in (C)$.

ب) التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب $\frac{z_C - z}{z_B - z}$:

$$Arg\left(\frac{z_C - z}{z_B - z}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right)$$

- $\frac{z_C - z}{z_B - z}$ عدد تخيلي بحت معناه $Arg\left(\frac{z_C - z}{z_B - z}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ أي

$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ومنه $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$

ومنه (C) هي دائرة قطرها القطعة $[BC]$ ماعدا النقطتين B و C.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- لدينا : $A(1;2;3), B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$

1) **إثبات أن النقط B,A و C تعين مستويا :**

أي نبين أن النقط B,A و C ليست في استقامية .

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$
- ولدينا : $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ أي $\overrightarrow{AC}(2-1; -2-2; 0-3)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(1;-4;-3)$

إذن $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{0}{-3}$ لا يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون $\overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{AC}$ أي أن $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$

ومنه B,A و C ليست في استقامية فهي تعين مستويا (ABC)

2) **اثبات أن $x + y - z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى** (ABC) :

نعوض بإحداثيات النقط B,A و C في المعادلة السابقة نجد :
$$\begin{cases} 1+2-3=0 \\ 2+1-3=0 \\ 2-2-0=0 \end{cases}$$

وبالتالي $x + y - z = 0$ **معادلة ديكارتية للمستوى** (ABC).

3) **لدينا :** $D(2,0,2), E(-4;6;2)$:

- **كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم** (DE):

شعاع توجيه للمستقيم (DE) هو : $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D; z_E - z_D)$

$\overrightarrow{DE}(-4-2; 6-0; 2-2)$ أي $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$

إذن
$$\begin{cases} x = -6t + 2 \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases}$$
مع $(t \in \mathbb{R})$

4) لدينا : $(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+14=0$

أ) اثبات أن المجموعة (S) سطح كرة :

$x^2-2x+y^2-2y+z^2-8z+14=0$ ومنه

$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+14=0$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-4=0$ وبالتالي

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4$

أي أن (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1;1;4)$ ونصف قطرها $R=2$

ب) اثبات أن المستقيم (DE) مماس لسطح الكرة (S):

بتعويض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE) في معادلة (S) نجد :

$(-6t+2-1)^2+(6t-1)^2+(2-4)^2=4$ أي $(-6t+1)^2+(6t-1)^2=0$

وبالتالي $36t^2-12t+1+36t^2-12t+1=0$

ومنه $72t^2-24t+2=0$ أي $36t^2-12t+1=0$

- حل المعادلة $36t^2-12t+1=0$:

حساب المميز : $\Delta=(-12)^2-4(36)(1)=144-144=0$

$\Delta=0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $t_1=-\dfrac{-12}{2\times36}=\dfrac{1}{6}$

ومنه المستقيم (DE) مماس لسطح الكرة (S) لايجاد نقطة التماس نعوض $t=\dfrac{1}{6}$

في جملة التمثيل الوسيطي نجد : $\begin{cases} x=-6\times\dfrac{1}{6}+2=1 \\ y=6\times\dfrac{1}{6}=1 \\ z=2 \end{cases}$ أي (DE) يمس (S) في النقطة $(1;1;2)$

ج) اثبات أن سطح الكرة (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة :

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

إذن $R=2,\quad d(\Omega,(ABC))=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ومنه $d(\Omega,(ABC))<R$

أي تقاطع (ABC) و (S) هو دائرة نصف قطرها

$r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(ABC)))^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ أي $r=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

- لدينا : $g(x) = 2\ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$ معرفة على $D_g =]0;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

1 - حساب النهايات :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x}\right) = -\infty$$ لأن $$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2\ln(x)\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\dfrac{x-1}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x}\right) = +\infty$$ لأن $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\ln(x)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

2 - حساب المشتقة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2}$$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$g'(x) = 0$ معناه $2x + 1 = 0$ ومنه $x = -\dfrac{1}{2}$ و $-\dfrac{1}{2} \notin]0;+\infty[$

- جدول إشارة المشتقة :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖			$+$	
$g'(x)$	‖	$-\infty$	0		$+\infty$

2) حساب $g(1)$:

$$g(1) = 2\ln(1) + \frac{1-1}{1} = 0$$

- جدول إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

؟ الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x)=(x-1)^2\ln(x)+x-1$ معرفة على $D_f=]0;+\infty[$

1) حساب نهايتي الدالة f :

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left((x-1)^2\ln(x)+x-1\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(\ln(x))=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x-1)^2=1\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x-1)=-1\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)^2\ln(x)+x-1\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x))=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\end{cases}$

2) اثبات أنه من كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=(x-1)g(x)+1$:

- لدينا :

$$f'(x)=2(x-1)\ln(x)+(x-1)^2\times\frac{1}{x}+1=(x-1)\left[2\ln(x)+\frac{x-1}{x}\right]+1=(x-1)g(x)+1$$

أي $f'(x)=(x-1)g(x)+1$

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

- جدول اشارة $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖		$+$		

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f'(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 1:

معناه $f'(x)=1$ ومنه $(x-1)g(x)+1=1$ أي $(x-1)g(x)=0$

- إما : $x-1=0$ ومنه $x=1$ - أو : $g(x)=0$ ومنه $x=1$

إذن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 1 في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

5) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+0=x-1$ أي $(T):\ y=x-1$

6) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المماس (T):

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا : $f(x)-y=(x-1)^2\ln(x)+x-1-(x-1)=(x-1)^2\ln(x)$

$f(x)-y=(x-1)^2\ln(x)$

$f(x)-y=0$ معناه $(x-1)^2\ln(x)=0$

- إما : $(x-1)^2=0$ ومنه $x-1=0$ أي $x=1$
- أو : $\ln(x)=0$ ومنه $x=1$
- جدول إشارة الفرق $f(x)-y$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x)-y$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

- المماس (T) يخترق المنحني (C_f) في النقطة $I(1;0)$ ومنه (T) مماس انعطاف .
- أي النقطة $I(1;0)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

7) حساب $f(3),f(2)$:

- $f(2)=(2-1)^2\ln(2)+2-1=1+\ln(2)=1.69$
- $f(3)=(3-1)^2\ln(3)+3-1=2+4\ln(3)=6.39$