ثانوية بلحاج قاسم نور الدين ـ الشلف　　　التاريخ : 12 / 02 / 2012　　　السنة الدراسية : 2011 – 2012

المستوى :3 ثانوي علوم تجريبية　　　المادة : رياضيات　　　المدة : ساعة واحدة

الفرض الأول المحروس الثلاثي الثاني

تمرين

☜ في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(1;-1;4\right)$، $B\left(7;-1;-2\right)$ ، $C\left(1;5;-2\right)$ و المستوي $\left(P\right)$ ذي المعادلة $x+y+z-4=0$.

1) أ) احسب احداثيات كل من الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$.

ب) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم عين قيسا بالدرجات مقرب الى الوحدة للزاوية BAC.

ج) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ثم أحسب مساحته . ($S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin BAC$)

2) أ) بين أنَّ الشعاع $\vec{n}\left(1;1;1\right)$ ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$.

ب) بين أنَّ المستوي $\left(ABC\right)$ هو المستوي $\left(P\right)$.

3) ليكن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذي التمثيل الوسيطي ، $\begin{cases}x=-2t\\y=-2t-2\\z=-2t-3\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

أ) بيِّن أنَّ المستقيم $\left(\Delta\right)$ عمودي على المستوي $\left(ABC\right)$.

ب) بيِّن أنَّ النقطة $D\left(-4;-6;-7\right)$ تنتمي الى المستقيم $\left(\Delta\right)$.

ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي $\left(ABC\right)$.

د) أحسب حجم رباعي الوجوه $DABC$. (حجم رباعي الوجوه $V=\frac{1}{3}S\times h$)

4) نعتبر النقطة $G\left(3;1;0\right)$ من الفضاء .

أ) بيِّن أن النقطة G هي نقطة تقاطع المستقيم $\left(\Delta\right)$ و المستوي $\left(ABC\right)$.

ب) بيِّن أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC.

5) لتكن $\left(S\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث ، $x^2+y^2+z^2-6x-2y-14=0$

أ) عيِّن طبيعة المجموعة $\left(S\right)$ و عيِّن عناصرها المُميِّزة .

ب) بيِّن أنَّ النقط A,B,C تنتمي الى المجموعة $\left(S\right)$.

ج) عين طبيعة تقاطع المجموعة $\left(S\right)$ و المستوي $\left(ABC\right)$.

6) أدرس تقاطع المجموعة $\left(S\right)$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$.

❀بالتوفيق في البكالوريا 2012 ☺

أستاذ المادة

ثانوية الشارة – الشلف　　　2011 – 2012

لدينا : $A(1;-1;4)$، $B(7;-1;-2)$ و $C(1;5;-2)$ و المستوي (P) ذي المعادلة $x+y+z-4=0$.

1) أ) حساب احداثيات كل من الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(6;0;-6)$

$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)$ أي $\overrightarrow{AC}(0;6;-6)$

$\overrightarrow{BC}(x_C-x_B;y_C-y_B;z_C-z_B)$ أي $\overrightarrow{BC}(-6;6;0)$

ب) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6\times0+0\times6+(-6)\times(-6)=36$ أي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=36$

- استنتاج قيس للزاوية BAC :

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC$ ومنه $\cos BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{36}{6\sqrt{2}\times6\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

وبالتالي : $BAC=60^\circ$

ج) اثبات أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

- لدينا : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(6)^2+(0)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$ و

$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(0)^2+(6)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$ و

$BC=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-6)^2+(6)^2+(0)^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

- أي لدينا : $AB=AC=BC=6\sqrt{2}$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع :

- **حساب مساحة المثلث** ABC : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin BAC=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

أي $S_{ABC}=18\sqrt{3}$

2) أ) تبيان أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC):

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=6\times1+0\times1+(-6)\times1=6-6=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$

و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\times1+6\times1+(-6)\times1=6-6=0$ ومنه $\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$ أي $\vec{n}$ عمودي

على (ABC) ومنه $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

ب) تبيان أنّ المستوي (ABC) هو المستوي (P) :

أي نبين أن A,B,C تنتمي الى المستوي (P)

نعوض بإحداثيات النقط A,B,C في معادلة (P) نجد :

$$\begin{cases} 1-1+4-4=0 \\ 7-1-2-4=0 \\ 1+5-2-4=0 \end{cases}$$ وبالتالي احداثيات النقط A,B,C تحقق معادلة (P) أي $(ABC)=(P)$

3) لدينا المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي ، $\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t-2 \\ z=-2t-3 \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

أ) اثبات أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC):

شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{u}(-2;-2;-2)$ و $\vec{n}(1;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

لدينا : $\frac{-2}{1}=\frac{-2}{1}=\frac{-2}{1}=-2$ ومنه $\vec{u}=-2\vec{n}$ أي $\vec{u}\parallel\vec{n}$ ومنه $(\Delta)\perp(ABC)$

ب) نبيِّن أنّ النقطة $D(-4;-6;-7)$ تنتمي الى المستقيم (Δ):

لدينا :نعوض بإحداثيات النقطة $D(-4;-6;-7)$ في جملة التمثيل الوسيطي نجد :

$$\begin{cases} -4=-2t \\ -6=-2t-2 \\ -7=-2t-3 \end{cases}$$ ومنه $D(-4;-6;-7)$ أي $D\in(\Delta)$

ج) حساب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC):

$$d(D,(ABC))=\frac{|x_D+y_D+z_D-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|-4-6-7-4|}{\sqrt{3}}$$

$$d(D,(ABC))=\frac{|-21|}{\sqrt{3}}=\frac{21\sqrt{3}}{3}=7\sqrt{3}$$ أي $d(D,(ABC))=7\sqrt{3}$

د) حساب حجم رباعي الوجوه $DABC$:

$$V_{DABC}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times d(D,(ABC))=\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times 7\sqrt{3}$$

أي $V_{DABC}=126(uv)$

4) لدينا $G(3;1;0)$ من الفضاء .

أ) تبيان أن النقطة G هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC):

نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (ABC) نجد :

$-2t-2t-2-2t-3-4=0$ ومنه $-6t-9=0$ أي $t=-\frac{3}{2}$

بالتعويض في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases} x=-2\left(-\frac{3}{2}\right)=3 \\ y=-2\left(-\frac{3}{2}\right)-2=1 \\ z=-2\left(-\frac{3}{2}\right)-3=0 \end{cases}$ ومنه $(ABC)\cap(\Delta)=\{G\}$

ب) تبيان أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC:

إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)=\left(\frac{1+7+1}{3};\frac{-1-1+5}{3};\frac{4-2-2}{3}\right)=(3;1;0)$$

أي $G(3;1;0)$ مركز ثقل المثلث ABC.

5) لدينا : (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $x^2+y^2+z^2-6x-2y-14=0$

أ) تعيين طبيعة المجموعة (S) :

لدينا : $x^2-6x+y^2-2y+z^2-14=0$ أي $(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+z^2-14=0$

ومنه $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=24$ و بالتالي (S) سطح كرة مركزها $G(3;1;0)$ و نصف قطرها $R=\sqrt{24}$.

ب) تبيان أنّ النقط A,B,C تنتمي الى المجموعة (S):

نعوض بإحداثيات النقط A,B,C في معادلة (S) نجد : $\begin{cases} (1-3)^2+(-1-1)^2+4^2=24 \\ (7-3)^2+(-1-1)^2+(-2)^2=24 \\ (1-3)^2+(5-1)^2+(-2)^2=24 \end{cases}$

أي النقط إحداثيات النقط A,B,C تحقق معادلة (S) ومنه النقط A,B,C تنتمي الى المجموعة (S)

ج) تعيين تقاطع المستوي (ABC) وسطح الكرة (S) :

☜ بما أن النقط A,B,C تنتمي الى سطح الكرة (S) فان المستوي (ABC) يقطع (S)

وفق الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

6) دراسة تقاطع (S) مع المستقيم (Δ) :

نعوض جملة التمثيل الوسيطي لـــ (Δ) في معادلة (S) نجد :

$(-2t-3)^2+(-2t-3)^2+(-2t-3)^2=24$ أي $(2t+3)^2+(2t+3)^2+(2t+3)^2=24$

ومنه $3(2t+3)^2=24$ أي $(2t+3)^2=8$

- اما : $2t+3=-\sqrt{8}$ ومنه $t=\dfrac{-3-\sqrt{8}}{2}$
- او $2t+3=\sqrt{8}$ ومنه $t=\dfrac{-3+\sqrt{8}}{2}$
- أي (Δ) يقطع (S) في نقطتين .
- لتعيين احداثيات نقطتي التقاطع نعوض بقيمتي t في جملة التمثيل الوسيطي نجد :

$$\begin{cases} x=-2\left(\dfrac{-3-\sqrt{8}}{2}\right)=3+2\sqrt{2} \\ y=-2\left(\dfrac{-3-\sqrt{8}}{2}\right)-2=3+2\sqrt{2}-2=1+2\sqrt{2} \\ z=-2\left(\dfrac{-3-\sqrt{8}}{2}\right)-3=3+2\sqrt{2}-3=2\sqrt{2} \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x=3+2\sqrt{2} \\ y=1+2\sqrt{2} \\ z=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$E\left(3+2\sqrt{2};1+2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$

$$\begin{cases} x=-2\left(\dfrac{-3+\sqrt{8}}{2}\right)=3-2\sqrt{2} \\ y=-2\left(\dfrac{-3+\sqrt{8}}{2}\right)-2=3-2\sqrt{2}-2=1-2\sqrt{2} \\ z=-2\left(\dfrac{-3+\sqrt{8}}{2}\right)-3=3+2\sqrt{2}-3=-2\sqrt{2} \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x=3-2\sqrt{2} \\ y=1-2\sqrt{2} \\ z=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$F\left(3-2\sqrt{2};1-2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$

❀ انتهى تصحيح الفرض الأول – بالتوفيق في البكالوريا 2012 ❀