التمرين الاول :

لدينا : $(E):\ y'+3y=2e^{-x}$

1) تعيين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $g(x)=ae^{-x}$ حل للمعادلة (E):

g حل للمعادلة (E) معناه $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$

أي $-ae^{-x}+3ae^{-x}=2e^{-x}$ ومنه $2ae^{-x}=2e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $a=1$.

2) حل المعادلة التفاضلية $(E'):\ y'+3y=0$:

$y'+3y=0$ معناه $y'=-3y$

- مجموعة حلول المعادلة (E') هي الدوال من الشكل $y=Ce^{-3x}\ (C\in\mathbb{R})$

3) اثبات أن الدالة f حل للمعادلة (E) اذا وفقط اذا كان $f-g$ حل للمعادلة (E'):

الدالة f حل للمعادلة (E) معناه $f'(x)+3f(x)=2e^{-x}$

ومنه $f'(x)+3f(x)=g'(x)+3g(x)$ لان g حل للمعادلة (E)

وبالتالي : $f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$ أي

$(f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$ و منه الدالة $f-g$ حل للمعادلة (E')

الدالة $f-g$ حل للمعادلة (E') معناه $(f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$

ومنه : $f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$ أي

$f'(x)+3f(x)=g'(x)+3g(x)$ وبالتالي $f'(x)+3f(x)=2e^{-x}$

لان g حل للمعادلة (E).

اذن الدالة f حل للمعادلة (E) .

4) استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E):

لدينا : $f-g$ حل للمعادلة (E') معناه $f(x)-g(x)=Ce^{-3x}$

ومنه $f(x)=Ce^{-3x}+g(x)=Ce^{-3x}+e^{-x}$ مع $(C\in\mathbb{R})$

5) تعيين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4:

(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه يساوي -4 معناه :

$f'(0)=-4$

☜ لدينا : $f'(x) = -3Ce^{-3x} - e^{-x}$

$f'(0) = -4$ معناه $-3Ce^{-3(0)} - e^{-(0)} = -4$ أي $-3C = -3$ ومنه :

$C = 1$

أي : $f(x) = e^{-3x} + e^{-x}$

التمرين الثاني :

I. لدينا : $k(x) = (-x+1)e^{x} - 1$

1) تعيين اشارة الدالة k :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$	-	0	-

2) لستنتاج أن $k(x) \leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x :

3) من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $k(x) \in]-\infty ; 0]$ ومنه $k(x) \leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

II. لدينا : $f(x) = (-x+2)(e^{x}+1)$

1) حساب النهايات :

☜ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2)(e^{x}+1) = +\infty$ لان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x}+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

☜ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2)(e^{x}+1) = -\infty$ لان $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x}+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$

2) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = k(x)$:

☜ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x) = (-1)(e^{x}+1) + (-x+2)e^{x} = -e^{x} - 1 + (-x+2)e^{x} = (-1-x+2)e^{x} - 1$$

أي $f'(x) = (-x+1)e^{x} - 1 = k(x)$ **وبالتالي** : من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f'(x) = k(x)$

☜ **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

بما أن $f'(x) = k(x)$ **فان لشارة** $f'(x)$ **من نفس لشارة** $k(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجموعة $\mathbb{R}$.

☜ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^x$

☜ **من أجل** $x\in\mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x)-(-x+2)=(-x+2)(e^x+1)-(-x+2)=(-x+2)[e^x+1-1]=(-x+2)e^x$$

أي $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^x$.

ب) اثبات أن المستقيم $(\Delta): y=-x+2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

☜ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x+2e^x)=0$

لان : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\end{cases}$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=-x+2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$

ج) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) **بالنسبة الى** (Δ) :

☜ ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$

☜ **لدينا :** $f(x)-y=(-x+2)e^x$

$f(x)-y=0$ معناه $-x+2=0$ أي $x=2$. (لان $e^x\neq 0$)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		+	0	**–**	
$f(x)-y$		+	0	**–**	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

4) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 :

☜ المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 معناه $f'(x)=-1$

أي : $(-x+1)e^x-1=-1$ ومنه $(-x+1)e^x=0$

وبالتالي $-x+1=0$ أي $x=1$

اذن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 **في النقطة** $A(1;f(1))$

5) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) **للمنحني** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة 0 :**

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)=0\times(x-0)+4=4$$

$(T): y=4$

☜ **كتابة معادلة ديكارتية للمماس** (T') **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة 1 :**

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1\times(x-1) + (e+1) = -x+e+2$$

$(T') : y = -x+e+2$

6) حل المعادلة $f(x)=0$:

☜ $f(x)=0$ معناه $(-x+2)(e^x+1)=0$

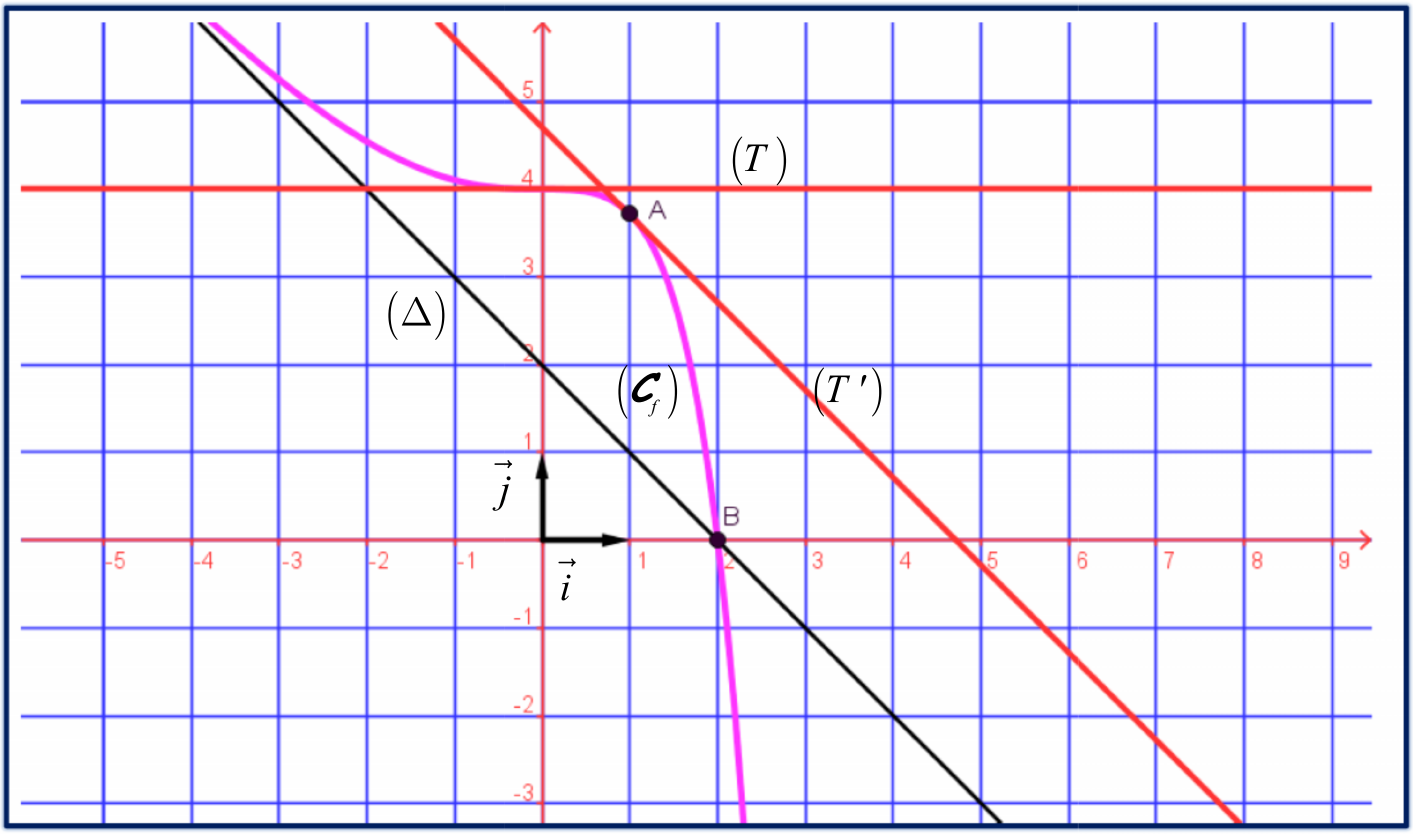
- اما : $-x+2=0$ ومنه $x=2$
- أو : $e^x+1=0$ ومنه $e^x=-1$ (ليس لها حل لان $e^x>0$)

مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$: $S=\{2\}$

☜ **استنتاج احداثيي نقطة تقاطع** (C_f) **مع** $(x'x)$:

$(C_f)\cap(x'x)=\{B\}$ حيث $B(2;0)$.

7) الرسم :



8) المناقشة البيانية لعدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=-x+m$:

☜ حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) **مع المستقيم ذي المعادلة** $y=-x+m$ **الموازي لكل من** (T') **و** (Δ) .

- **إذا كان** $m\in]-\infty;2]$ فان المعادلة تقبل حلا وحيد ا موجبا .
- **اذا كان** $m\in]2;4[$ فان المعادلة تقبل حلين احدهما سالب تماما و الآخر موجب تماما .
- **اذا كان** $m=4$ فان المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب تماما .
- **اذا كان** $m\in]4;e+2[$ فان المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .

- اذا كان $m = e+2$ فان المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = 1$.
- اذا كان $m \in \left]e+2, +\infty\right[$ فان المعادلة ليس لها حل .