ثانوية بلحاج قاسم نور الدين - الشلف التاريخ : 2012/02/27 السنة الدراسية : 2011 – 2012

المستوى : 3 علوم تجريبية اختبار الثلاثي الثاني المدة : 3 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الاول :

☜ $P(z)$ كثير حدود معرف في المجموعة $\mathbb{C}$ بـــ : $P(z)=z^2+2\sqrt{3}\,z+4$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) أكتب حلي المعادلة على الشكل المثلثي .

3) في المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط B,A و C لاحقتها على الترتيب $z_A=2i$, $z_B=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$.

أ) أكتب كلا من الأعداد z_B,z_A و z_C على الشكل الأسي .

ب) علِّم النقط B,A و C ثم بين أنَّها تنتمي الى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

4) نضع : $L=\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

أ) بين أنَّ ، $L=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ثم أكتب العدد L على الشكل الأسي .

ب) فسر هندسيا الطويلة و عمدة العدد L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج) أحسب مساحة المثلث ABC.

التمرين الثاني:

☜ في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(4;1;5)$, $B(-3;2;0)$، $C(1;3;6)$, $F(-7;0;4)$ و المستوي (P) ذي المعادلة $x+2y-z-1=0$.

1) أ) بين أن النقط B,A و C تعين مستويا .

ب) بين أن هذا المستوي هو (P).

ج) أحسب d المسافة بين النقطة F و المستوي (P).

2) ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) و المار من النقطة F.

أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة F على المستوي (P).

ج) أحسب المسافة FH.

3) لتكن (S) سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر 6.

أ) بين أن النقطة B تنتمي الى (S).

ب) عين مركز و نصف قطر $(\mathcal{C})$ دائرة تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S).

☜ أقلب الصفحة

التمرين الثالث:

اختيار من متعدد : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المقترحة مع التبرير .

1) نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\ y'-2y=0$

أ) مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

أ) $g(x)=ce^{-2x}$ مع $c\in\mathbb{R}$ ب) $g(x)=ce^{2x}$ مع $c\in\mathbb{R}$ ج) $g(x)=2ce^{x}$ مع $c\in\mathbb{R}$

ب) الحل الخاص للمعادلة (E) و الذي يحقق $g(0)=2$ هو :

أ) $g(x)=2e^{-2x}$ ب) $g(x)=2e^{2x}$ ج) $g(x)=2e^{x}$

2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E'):\ y'-2y=4$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

أ) $h(x)=ce^{2x}-2$ مع $c\in\mathbb{R}$ ب) $h(x)=ce^{2x}+2$ مع $c\in\mathbb{R}$ ج) $h(x)=2ce^{x}+2$ مع $c\in\mathbb{R}$

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=1+\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$ حيث b,a عددان حقيقيان .

- عين العددين الحقيقيين b,a بحيث المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمَّ فسِّر النتيجتين بيانيا .

2) أحسب $f'(x)$ ثمَّ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0.27;0.28[$.

4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة الى المستقيم (d) ذي المعادلة $y=1$.

5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1

6) أرسم (T)، (d) و $(\mathcal{C}_f)$.

❁بالتوفيق في البكالوريا 2012 ❁

التمرين الأول ☺ باك 2012 :

- لدينا : $P(z)=z^2+2\sqrt{3}\,z+4$

1) حل المعادلة $P(z)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$:

$P(z)=0$ معناه $z^2+2\sqrt{3}\,z+4=0$

- حساب المميز Δ :

$$\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4(1)\times(4)=12-16=-4$$

نضع : $\Delta=4i^2=(2i)^2$ وبالتالي الجذران التربيعيان للعدد Δ هما : $\delta_1=2i$ ، $\delta_2=-2i$

المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين هما : $z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{2}=\dfrac{2\left(-\sqrt{3}+i\right)}{2}=-\sqrt{3}+i$

$$z_2=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{2}=\frac{2\left(-\sqrt{3}-i\right)}{2}=-\sqrt{3}-i$$

مجموعة حلول المعادلة : $S=\left\{-\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}-i\right\}$

2) كتابة الحلين على الشكل المثلثي :

- لدينا : $z_1=-\sqrt{3}+i$
- حساب الطويلة : $|z_1|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{4}=2$
- تعيين عمدة للعدد z_1 : نضع $Arg(z_1)=\theta_1$ إذن $\begin{cases}\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه

$$\theta_1=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

☜ الشكل المثلثي للعدد z_1 $z_1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

- لدينا : $z_2=-\sqrt{3}-i$
- حساب الطويلة : $|z_2|=\left|-\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$
- تعيين عمدة للعدد z_2 : نضع $Arg(z_2)=\theta_2$ إذن $\begin{cases}\cos\theta_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه

▪ $\theta_2=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

☜ الشكل المثلثي للعدد z_2 $\quad z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

3) لدينا : $z_A=2i\,,z_B=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$.

أ) كتابة الأعداد $z_A\,,z_B$ و z_C على الشكل الأسي :

▪ لدينا : $z_A=2i$

حساب الطويلة : $|z_A|=|2i|=2$

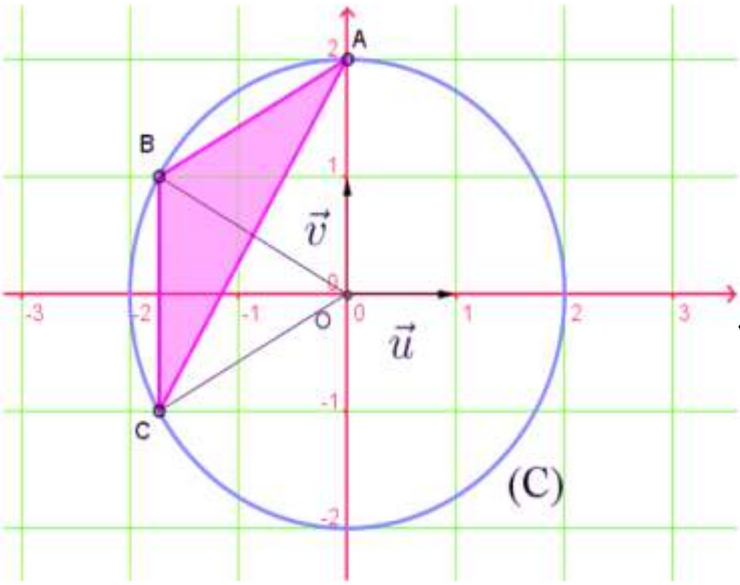
تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta=Arg(z_A)$ إذن $\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=1\end{cases}$ ومنه

$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ الشكل الاسي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

▪ لدينا : $z_B=z_1=-\sqrt{3}+i$ ومنه $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

▪ ولدينا : $z_C=z_2=-\sqrt{3}-i$ ومنه $z_C=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب) تعليم النقط :



– اثبات أن النقط C,B,A تنتمي الى نفس الدائرة $(\mathcal{C})$:

لدينا : $OA=OB=OC=2$ ومنه

C,B,A تنتمي الى نفس

الدائرة $(\mathcal{C})$ ذات المركز O ونصف قطرها

$R=2$.

لان $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$

4) لدينا : $L=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

أ) اثبات أن $\quad L=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

▪ لدينا :

$$L=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{2i+\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{-2i}=\frac{(\sqrt{3}+i)(2i)}{(-2i)(2i)}=\frac{2i\sqrt{3}-2}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $L=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

- كتابة العدد L على الشكل الاسي:

– حساب الطويلة : $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ = $|L|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ أي $|L|=1$

– تعيين عمدة للعدد L : نضع $\theta=Arg(L)$ إذن $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

الشكل الاسي للعدد L : $L=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب) التفسير الهندسي لطويلة و عمدة العدد L :

$|L|=\frac{BA}{BC}$ و $Arg(L)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $|L|=\frac{BA}{BC}=1$ و $Arg(L)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2\pi}{3}$ إذن ABC مثلث متساوي الساقين .

ج) حساب مساحة المثلث ABC :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times BA\times BC\times\sin CBA=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{2\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(us)$$

$BA=BC=|-2i|=2$ $\quad$ $S_{ABC}=\sqrt{3}(us)$

التمرين الثاني: باك 2012

لدينا : $A(4;1;5),B(-3;2;0)$ ، $C(1;3;6),F(-7;0;4)$ و $(P):x+2y-z-1=0$.

1) أ) اثبات أن النقط A,B,C تعين مستوي :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-7;1;-5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$ ومنه $\frac{-3}{-7}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-5}$

وبالتالي لا يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون $\overrightarrow{AC}=K\overrightarrow{AB}$ أي أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا . ومنه النقط A,B,C ليست في استقامية فهي تعين مستويا (ABC)

ب) اثبات أن المستوي (ABC) هو (P):

نعوض بإحداثيات النقط A,B,C في معادلة (P) نجد : $\begin{cases}4+2(1)-5-1=0\\ -3+2\times 2-0-1=0\\ -7+2\times 0-4-1=0\end{cases}$ ومنه $(P)=(ABC)$

ج) حساب المسافة d :

$$d=d\left(F,(P)\right)=\frac{|-7+2\times0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$$

$d=2\sqrt{6}$

2) لدينا (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) و المار من النقطة F:

أ) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

لتكن $M(x;y;z)$ من (Δ) معناه $\begin{cases}x=t-7\\y=2t\\z=-t+4\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

ب) تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة F على المستوي (P):

H المسقط العمودي للنقطة F على المستوي (P) معناه H هي نقطة تقاطع (P) و (Δ)

نعوض بجملة التمثيل الوسيطي في معادلة (P) نجد :

$t-7+2(2t)-(-t+4)-1=0$ ومنه $6t-12=0$ أي $t=2$

- من أجل $t=2$ نجد $\begin{cases}x=2-7\\y=2\times2\\z=-2+4\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-5\\y=4\\z=2\end{cases}$ إذن $H(-5;4;2)$

ج) حساب المسافة FH:

$FH=\sqrt{(-5+7)^2+(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ أي $FH=d=2\sqrt{6}$

3) لدينا (S) سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر 6:

أ) اثبات أن $B\in(S)$:

$B\in(S)$ معناه $BF=R=6$

$BF=\sqrt{(-7+3)^2+(0-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$ ومنه $BF=R=6$

أي $B\in(S)$.

ب) تعيين مركز ونصف قطر $(\mathcal{C})$ دائرة تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S):

بما أنَّ $B\in(S)$ و (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) و المار من النقطة F فان :

مركز الدائرة $(\mathcal{C})$ هو النقطة H المسقط العمودي للنقطة F على المستوي (P)

ونصف قطرها $r=BH=\sqrt{(-5+3)^2+(4-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$r=2\sqrt{3}$

💻 التمرين الثالث ☺ باك 2012 :

1) نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): \ y'-2y=0$

أ) مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=ce^{2x}$ مع $c\in\mathbb{R}$ (**الاجابة الصحيحة ب**)

☜ لان المعادلة التفاضلية (E) من الشكل $y'=a\,y$ وحلولها هي الدوال من الشكل : $x\mapsto y=ce^{ax}$

في هذه الحالة لدينا : $y'=2y$ وبالتالي $a=2$.

ب) الحل الخاص للمعادلة (E) و الذي يحقق $g(0)=2$ هو :

$g(x)=2e^{2x}$ (**الاجابة الصحيحة ب**)

☜ لان : $g(0)=2$ معناه $ce^{2\times0}=2$ ومنه $c=2$ و بالتالي $g(x)=2e^{2x}$

2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E'): \ y'-2y=4$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x)=ce^{2x}-2$ مع $c\in\mathbb{R}$ (**الاجابة الصحيحة أ**)

لان المعادلة (E') من الشكل $y'=ay+b$ ومجموعة حلولها هي الدوال من الشكل $x\mapsto y=ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$

في هذه الحالة لدينا : $y'=2y+4$ ومنه $a=2$ و $b=4$.

💻 ☹ التمرين الرابع ☺ باك 2012 :

I. لدينا : $g(x)=1+\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$

☜ تعيين قيمة كل من العددين b,a بحيث المنحني $(\mathcal{C}_g)$ يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي $(x'x)$:

معناه $g(1)=2$ و $g'(1)=0$

- $g(1)=2$ معناه $1+\dfrac{a+b\ln(1)}{1}=2$ ومنه $1+a=2$ أي $a=1$.
- ولدينا : $g'(x)=\dfrac{\frac{b}{x}\times x-(a+b\ln(x))}{x^2}=\dfrac{b-a-b\ln(x)}{x^2}$ أي $g'(x)=\dfrac{b-a-b\ln(x)}{x^2}$

$g'(1)=0$ معناه $\dfrac{b-1-b\ln(1)}{1^2}=0$ أي $b-1=0$ و منه $b=1$

و بالتالي : $g(x)=1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}$

.II لدينا : $f(x)=1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}\right)=-\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\dfrac{1+\ln(x)}{x}=-\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}\right)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=0$

☜ التفسير الهندسي للنتيجتين :

المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين : $x=0$ (مستقيم مقارب عمودي) و $y=1$ مستقيم مقارب أفقي .

2) حساب المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1-1-\ln(x)}{x^2}=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

– دراسة اشارة المشتقة : اشارة $f'(x)$ عكس اشارة $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

– جدول تغيرات الدالة f :

–

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

$f(1)=1+\dfrac{1+\ln(1)}{1}=1+1=2$

3) اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0.27;0.28[$:

- الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.27;0.28]$
- ولدينا : $f(0.27)=1+\dfrac{0.27+\ln(0.27)}{0.27}=-0.15$ و

$f(0.28)=1+\dfrac{0.28+\ln(0.28)}{0.28}=0.03$

إذن : $f(0.27)\times f(0.28)<0$

– حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0.27;0.28[$.

4) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة الى المستقيم (d) ذي المعادلة $y=1$:

☜ ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=1+\dfrac{1+\ln(x)}{x}-1=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$

▪ $f(x)-y=0$ معناه $\begin{cases}1+\ln(x)=0\\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$ أي $\begin{cases}\ln(x)=-1\\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}e^{\ln(x)}=e^{-1}\\ x\in]0;+\infty[\end{cases}$

وبالتالي : $x=e^{-1}$

▪ جدول اشارة الفرق :

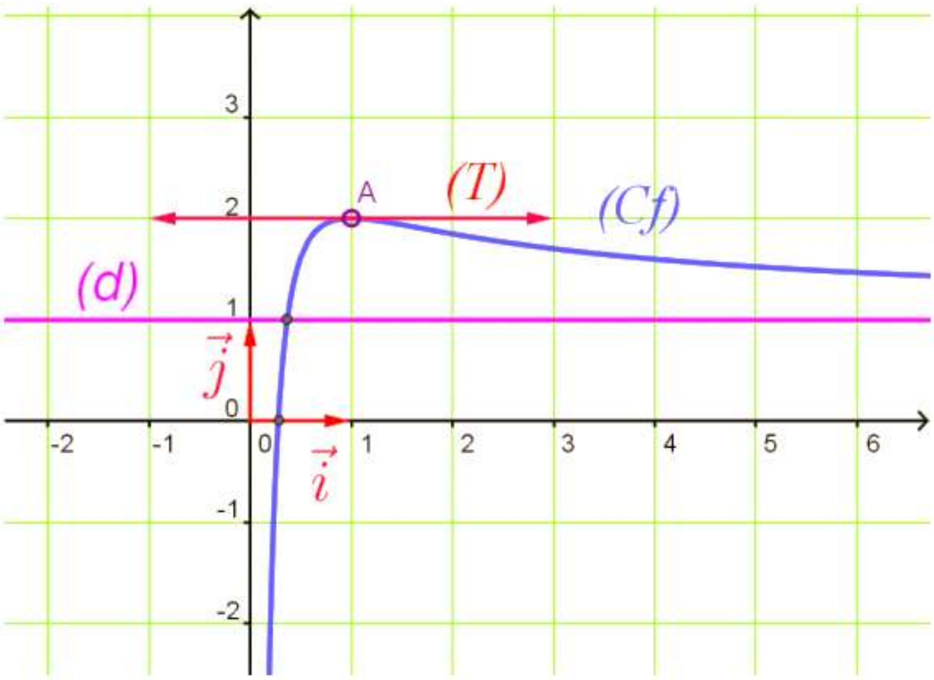
x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1+\ln(x)$	$\|\|$ $-$	0	$+$
$f(x)-y$	$\|\|$ $-$	0	$+$
الوضعية النسبية	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (d)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (d)	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (d)

5) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 أي عند النقطة $A(1;2)$:

$f(1)=2, f'(1)=0$ $\quad\quad$ $y=f'(1)(x-1)+f(1)=0\times(x-1)+2=2$

$(T):\ y=2$

6) الرسم :



❀ انتهى تصحيح الاختبار الثاني ☺ بالتوفيق