تصحيح اختبار الفصل الثاني

التمرين الأول

.1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$

$\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1 = i^2$ **0.5**

$z=1-i$ أو $z=1+i$ .... **0.5+0.5**

.2 $z_A = 1+i$, $z_B = \overline{z_A} = 1-i$; $z_C = 2z_B = 2-2i$; $z_I = 3$

(أ ....

$|z_A - z_I| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{5}$

$|z_B - z_I| = |1-i-3| = |-2-i| = \sqrt{5}$ **01**

$|z_C - z_I| = |2-2i-3| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

ومنه النقط A ، B و C تبعد بنفس المسافة عن I أي A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة ذات المركز I ونصف القطر $\sqrt{5}$ **0.5**

ب) التحقق أن $z_C - z_I = i(z_A - z_I)$

لدينا $i(z_A - z_I) = i(-2+2) = -2i - 1 = z_C - z_I$ **0.5**

ومنه $\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I} = i$ .... **0.5** مع $\left|\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I}\right| = \dfrac{|z_C - z_I|}{|z_A - z_I|} = |i| = 1$ أي $|z_C - z_I| = |z_A - z_I|$

و $Arg\left(\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I}\right) = Arg(z_C - z_I) - Arg(z_A - z_I) = Arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

و منه المثلث IAC قائم في I ومتساوي الساقين **0.5**

جـ) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيليا صرفا .

لدينا $\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = \left[\dfrac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2}, 0\right]}\right]^n = \left[1, \dfrac{\pi}{4}\right]^n = \left[1, \dfrac{n\pi}{4}\right]$ **01**

$\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيلي صرفي معناه $\dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{N}$

معناه $n=4k+2$ $k \in \mathbb{N}$ **01**

.3 $T: M(z) \longrightarrow M'(z')$ حيث $(z'-1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$

أي $(z'-1+i) = i(z-1+i)$

أي $z' = iz - 2i$ **01**

بما أن $|i| = 1$ فان التحويل T هو دوران زاويته $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω

حيث $z_\Omega = \dfrac{-2i}{1-i} = 1-i$ أي $\Omega(1, -1)$ **01**

تعيين لاحقة D صورة النقطة O بالتحويل T. لدينا $z_D = -i\, z_O - 2i = -2i$ أي $z_D = -2i$ **01**

هـ) إثبات أن (AB) و (CD) متعامدين

لدينا $z_{\overrightarrow{AB}} = -2i$ و $z_{\overrightarrow{CD}} = -2$ ومنه $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = i$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان **0.5**

التمرين الثاني :

الجزء I : g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بــ : $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$

(1 بقراءة بيانية لدينا

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ ومنه $a=1$ **0.5**

ب) $\begin{cases} g(1)=0 \\ g(3)=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \dfrac{1+b+c}{1}=0 \\ \dfrac{9+3b+c}{9}=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} b+c=-1 \\ 3b+c=-9 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2b=-8 \\ c=-1-b \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases}$ **01**

اذن $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

جـ) جدول تغيرات الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\dfrac{2x(2x-3)}{x^4}$ **0.5**

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'(x)	‖	−	0	+	
g(x)	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1

01

(2 إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

لدينا $g(x)=g(3)=0$

من اجل $x\in]0,1[\cup]3,+\infty[$, $g(x)>0$

من اجل $x\in]1,3[$, $g(x)<0$ **0.5**

الجزء II: f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بــ : $f(x)=-\dfrac{3}{x}+x-4\ln x$

(1 أ/ البرهان ان $\lim\limits_{u\to0} u\ln u=0$

لدينا $\lim\limits_{t\to-\infty} t\,e^t=0$

باستبدال المتغير نضع $e^t=u$ ومنه $t=\ln u$ اذا كان $t\to-\infty$ فان $u\to0$

تصبح $\lim\limits_{t\to-\infty} t\,e^t=\lim\limits_{u\to0} u\ln u=0$ **0.5**

ب/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(-\dfrac{3}{x}+x-4\ln x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{-3+x^2-4x\ln x}{x}\right)=-\infty$

أي حامل محور التراتيب مقارب (C_f) **0.5**

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{3}{x}+x-4\ln x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(-\dfrac{3}{x^2}+1-4\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$ **0.5**

أي إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{3}{x}-4\ln x\right)=+\infty$ أي المنحني (C_f) فرع قطع مكافئ بإتجاه المنصف الأول من جهة $+\infty$

(2 الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا

$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}+5-\dfrac{4}{x}=\dfrac{3+x^2-4x}{x^2}=g(x)$ **0.5**

أي إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		3		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	0	+	
F(x)	‖ $-\infty$	↗	-2	↘	2-4*ln(3)	↗	$+\infty$

01..........

(3 إثبات إن يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها محصورة بين 9,2 و 9,3

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]3,+\infty[$ فهي إذن مستمرة ومتزايدة تماما على $[9,2\ ;\ 9,3]$ ولدينا

$f\ (9,3) \simeq 5,74\times10^{-2}\quad ,\ f\ (9,2) \simeq -2,9\times10^{-3}$

إن $f\ (9,2)\times f\ (9,3) < 0$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها محصورة بين 9,2 و 9,3 ....**0.5**

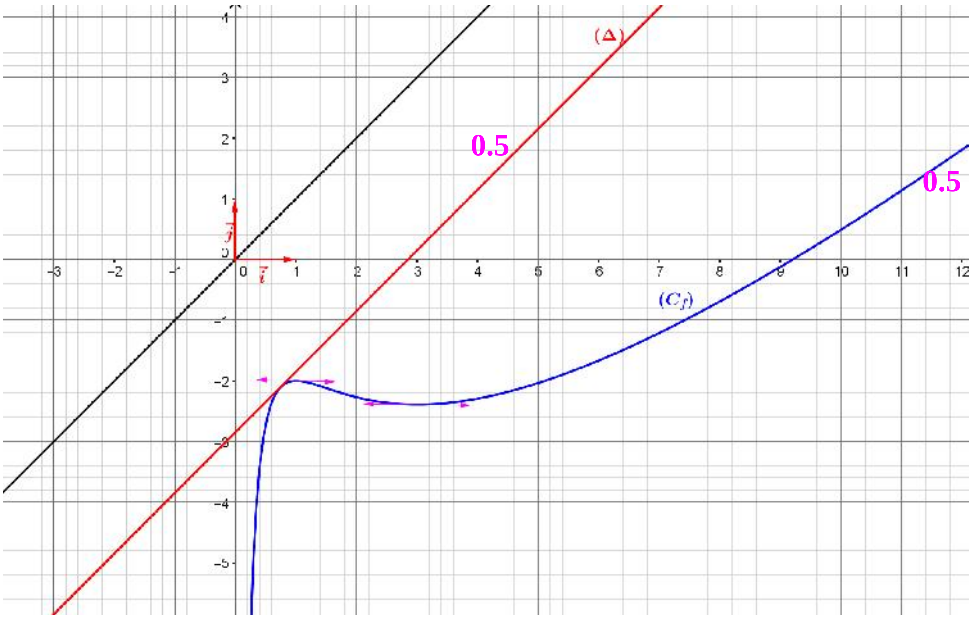
(4 إثبات إن (C_f) يقبل مماس (Δ) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=x$

لدينا $f'(x)=1$ معناه $g(x)=1$ معناه $\frac{x^2-4x+3}{x^2}$ معناه $\begin{cases} x^2-4x+3=x^2 \\ x\neq 0\end{cases}$ معناه $x\neq0; x=\frac{3}{4}$

كتابة معادلة لـ $(\Delta)\ y=x-4-4\ln\frac{3}{4}$ **0.5**

(5 $f\ (\sqrt{3})=-2\ln3$ **0.5**

رسم (Δ) و (C_f)



(6 المناقشة البيانية وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 - (m+4\ln(x))\,x - 3 = 0$ ....(E)

(E) يكافئ $f(x)=m$ **0.5**

من اجل $m\in\ ]-\infty, f\ (3)[$ المعادلة (E) تقبل حل وحيد موجب

من اجل $m=f\ (3)\ ;\ m=2$ المعادلة (E) تقبل حلين موجبين احدهما مضاعف **0.5**

من اجل $m\in\ ]f\ (3);2[$ المعادلة (E) المعادلة تقبل 3 حلول موجبة

من اجل $m\in\ ]2,+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حل وحيد موجب

إنتهى