التصحيح

التمرين الأول :

1) بما أن الدالة h تقبل قيمة حدية محلية(ذروة) في المجال $[-1,0]$ فإن المنحني (Γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل في هذا المجال .

2) من أجل $x \geq -1$ لدينا $h(x)=\sqrt{x^3+x^2}=\sqrt{x^2(x+1)}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{x+1}=|x|\sqrt{x+1}$

كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة $h(x)=\begin{cases}-x\sqrt{x+1} & , \quad -1\leq x\leq 0\\ x\sqrt{x+1} & , \quad x\geq 0\end{cases}$

3) الإستمرارية عند -1 : بما أن -1 لا ينتمي إلى مجال مفتوح فالدالة h غير مستمرة عند -1 .

- الإستمرارية عند 0 من اليسار: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[-x\sqrt{x+1}\right]=0$
- الإستمرارية عند 0 من اليمين : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x\sqrt{x+1}\right]=0$

بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=0$ و $h(0)=0$ فالدالة h مستمرة عند 0

- الإشتقاقية عند -1 : بما أن الدالة h غير مستمرة عند -1 فهي غير قابلة للإشتقاق عند -1
- الإشتقاقية عند -1 من اليمين : $\lim\limits_{\sim\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(-1+\sim)-h(-1)}{\sim}=\lim\limits_{\sim\xrightarrow{>}0}\dfrac{(1-\sim)\sqrt{\sim}}{\sim}=\lim\limits_{\sim\xrightarrow{>}0}\dfrac{1-\sim}{\sqrt{\sim}}=+\infty$

أي الدالة h غير قابلة للإشتقاق عند -1 من اليمين و المنحني يقبل نصف مماس يوازي حامل محور التراتيب

- الإشتقاقية عند 0 من اليسار : $\lim\limits_{\sim\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(0+\sim)-h(0)}{\sim}=\lim\limits_{\sim\xrightarrow{<}0}\dfrac{-\cancel{\sim}\sqrt{\sim+1}}{\cancel{\sim}}=-1$
- الإشتقاقية عند 0 من اليمين : $\lim\limits_{\sim\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(0+\sim)-h(0)}{\sim}=\lim\limits_{\sim\xrightarrow{>}0}\dfrac{\cancel{\sim}\sqrt{\sim+1}}{\cancel{\sim}}=1$

بما أن العدد المشتق من اليسار لا يساوي العدد المشتق من اليمين فالدالة h غير قابلة للإشتقاق عند 0 و المنحني يقبل نصفي مماس

4) إتجاه تغير الدالة h : الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1\ ,\ +\infty[$ و لدينا $h'(x)=\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}=\dfrac{x(3x+2)}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	||	+	
h(x)	0	↗	$h(-\frac{2}{3})$	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x}=+\infty$

للمنحني فرع قطع مكافئ بإتجاه حامل محور التراتيب .

التمرين الثاني :

الجزء الأول : (1 لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=e^x-x-1$

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0\ ,\ +\infty[$ و لدينا $g'(x)=e^x-1$

من أجل $x>0$ لدينا $e^x>1$ و منه $e^x-1>0$ و منه $g'(x)>0$ أي الدالة g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0 ↗	

- $g(0)=0$ إذن من أجل $x\geqslant 0$ فإن $g(x)\geqslant 0$

2) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $h(x)=(2-x)e^x-1$

- $h(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$
- الدالة h قابلة للإشتقاق على $]0\ ,\ +\infty[$ و لدينا

$h'(x)=(2-x)e^x-e^x=(1-x)e^x$

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	
h(x)	1	↗	e-1	↘	$-\infty$

- بما أن الدالة h مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1,+\infty[$
  مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1.8 \;,\; 1.9[$ و لدينا
  $f(1.9) \approx -\,0.33$ و $f(1.8)\;\; 0.21$
  إذن للمعادلة $h(x) = 0$ حل وحيد α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$
- إشارة $h(x)$:
  من أجل $x \in [0 \;,\; \alpha[$ فإن $h(x) > 0$
  من أجل $x \in \,]\alpha \;,\; +\infty[$ فإن $h(x) < 0$ و $h(\alpha) = 0$

الجزء الثاني : لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي $x \geqslant 0$ لدينا $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x-x} = \dfrac{\cancel{e^x}(1-e^{-x})}{\cancel{e^x}(1-xe^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

أي المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب معادلته y=1 و يوازي حامل محور الفواصل

- ب) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0 \;,\; +\infty[$ و لدينا

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} + 2e^x - 1}{(e^x-x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x-x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$f(\alpha)$	↘	1

2) أ)

$$f(x) - x = \frac{e^x-1}{e^x-x} - x = \frac{e^x - 1 - x(e^x-x)}{e^x-x}$$

$$= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{(1-x)e^x + x^2 - 1}{e^x-x}$$

$$= \frac{(1-x)e^x + (x-1)(x+1)}{e^x-x} = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x-x}$$

$$= \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$$

و بما أن : $g(x) \geqslant 0$ فإن $e^x - x - 1 \geqslant 0$ و منه $e^x - x \geqslant 1$ و $1 > 0$ إذن $e^x - x > 0$

و بالتالي إشارة $f(x) - x$ من إشارة $(1-x)$

من أجل $x \in [0 \;,\; 1[$ المنحنى (C) يقع فوق (T)

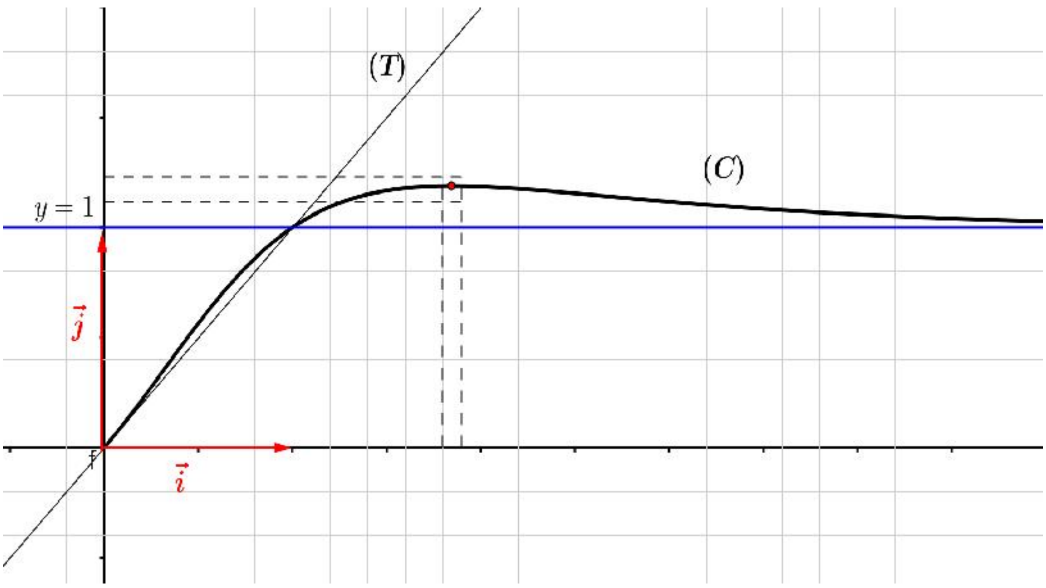
من أجل $x \in \,]1 \;,\; +\infty[$ المنحنى (C) يقع تحت (T)

من أجل $x = 1$ (C) يتقاطع مع (T)

x	0		1		$+\infty$
f(x)-x		+	0	−	

3) معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$



تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا $h(\alpha) = 0$ يعني

$(2 - \alpha)e^{\alpha} - 1 = 0$ يعني $e^{\sim} = \dfrac{1}{2-e^{\sim}}$

و منه $f(\sim) = \dfrac{\dfrac{1}{2-\sim} - 1}{\dfrac{1}{2-\sim} - \sim} = \dfrac{1-2+\sim}{1-2\sim+\sim^2}$

$$= \frac{\sim - 1}{(\sim-1)^2} = \frac{1}{\sim - 1}$$

$1.8 < \alpha < 1.9$ فإن $0.8 < \alpha - 1 < 0.9$

و منه $\dfrac{1}{0.9} < \dfrac{1}{\sim - 1} < \dfrac{1}{0.8}$

و منه $1.11 < f(\sim) < 1.25$