تصحيح الواجب المنزلي رقم03

المسألة:

I/ 1) **إثبات انه من اجل x>0 :** $e^{2x}-1>0$

لدينا من أجل x>0 . $e^x>1$ ومنه $e^x-1>0$ وكذلك $e^x+1>0$ إذن $\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)>0$ أي $e^{2x}-1>0$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$

أ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\infty} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\infty}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{2x}-1}=0$

ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا

$$g'(x)=\frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}.<0$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

x	0		+∞
g'(x)		−	
g (x)	+∞	↘	0

II/ نعتبر الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$ بتمثيلها البياني

نقبل أن
$$f(x)=2x(a(\ln x)^2+b\ln x+c)=4a\ln x+2b+2a(\ln x)^2+2b\ln x+2c=2a(\ln x)^2+(4a+2b)\ln+2b+2c$$
$$=2\left[a(\ln x)^2+(2a+b)\ln x+b+c\right]$$

2)بيانيا لدينا $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ ، $f'\left(\sqrt{e}\right)=0$ و $f'(e)=4$

3) $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{e}\right)=0 \\ f\left(\sqrt{e}\right)=0 \\ f'(e)=4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2\left[a\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2+(2a+b)\ln\frac{1}{e}+b+c\right]=0 \\ 2\left[a\left(\ln\sqrt{e}\right)^2+(2a+b)\ln\sqrt{e}+b+c\right]=0 \\ 2\left[a+(2a+b)+b+c\right]=4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} c-a=0 \\ 5a+6b+4c=0 \\ 4a+2b=2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} a=c \\ 9a+6b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a=c \\ 3a+2b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$ إذن $f(x)=2x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)$

4) **حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ نضع $t=-\ln x$ بما أن $x\xrightarrow{>}0$ فان $t\longrightarrow+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left[2e^{-t}\left(2t^2+3t+2\right)\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[4\underbrace{\frac{t^2}{e^t}}_{0}+6\underbrace{\frac{t}{e^t}}_{0}+4\underbrace{\frac{1}{e^t}}_{0}\right]=0$$

5) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)\right]=\lim_{+\infty}2x(\ln x)^2\left[2-\frac{3}{\ln x}+\frac{2}{(\ln x)^2}\right]=+\infty$$

6) لدينا من اجل x>0

$$f'(x)=2\left[a(\ln x)^2+(2a+b)\ln x+b+c\right]=2\left[2(\ln x)^2+\ln x-1\right]=2(\ln x+1)(2\ln x-1)$$

7) **جدول تغيرات الدالة f**

x	0		$\frac{1}{e}$		$\sqrt{e}$		
f'(x)		+	0	−	0	+	+∞
f(x)	0	↗	$\frac{14}{e}$	↘	$2\sqrt{e}$	↗	+∞

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{14}{e}$

$f\left(\sqrt{e}\right)=2\sqrt{e}$

III/ ¨ دالة معرفة على $[0,1;0,3]$ بـ $¨(x) = f(x) - g(x)$

1)أ/ **إثبات أنه من أجل** $x \in [0,1 \quad ; \quad 0,3]$ **فإن** $¨'(x) > 0$

لدينا من اجل x>0 $\quad ¨'(x) = f'(x) - g'(x)$

في المجال $[0,1 \quad ; \quad 0,3]$ $\quad g'(x) \prec 0$ و $f'(x) \succ 0$ ومنه $f'(x) - g'(x) \succ 0$ ومنه $¨'(x) > 0$

ب) **إثبات أن المعادلة** $f(x) = g(x)$ **تقبل حل وحيد في المجال** $[0,1 \quad ; \quad 0,3]$

بما ان الدالة ¨ هي مجموع دالتين مستمرتين على المجال $[0,1 \quad ; \quad 0,3]$ فهي دالة مستمرة t هذا المجال و متزايدة تماما على $[0,1 \quad ; \quad 0,3]$ ولدينا

$¨(0.1) \simeq -0.61$ و $¨(0.3) \simeq 3.89$ أي $¨(0.1) \times ¨(0.3) < 0$

ومنه حسب القيم المتوسطة المعادلة $¨(x) = 0$ تقبل حل وحيد في مجال $[0,1 \quad ; \quad 0,3]$

أي المعادلة $f(x)$=g (x) تقبل حل وحيد في هذا المجال

2) **إثبات أنه من أجل** $x>0$ $\quad$ $f(x) > 0$

لدينا $\quad f(x) = \underbrace{2x}_{+}\left(\underbrace{2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2}_{\Delta<0}\right)$ اذن $f(x) > 0$

طريقة 2 : من جدول التغيرات

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $h = g - f$

أ) **تعيين نهاية الدالة h عند 0 و** $+\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to0} g(x) = +\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to0} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ اذن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

ب) **دراسة إتجاه تغير الدالة h على المجال** $]0,+\infty[$

بما أن الدالة g متناقصة تماما مع المجال $]0,+\infty[$ فاتجاه تغير الدالة h عكس اتجاه تغير الدالة f

جـ) **إثبات أن** $h(~) = (g - g)(~)$

لدينا $h(~) = (g - f)(~)$ مع $f(~) = g(~)$ وبالتالي $h(~) = (g - g)(~)$

$$h(~) = (g-g)(~) = g[g(~)] = g\left[\frac{1}{e^{2~}-1}\right] = \frac{1}{e^{2\left(\frac{1}{e^{2~}-1}\right)}-1} = \frac{1}{e^{\frac{2}{e^{2~}-1}}-1}$$

$0.1 < ~ < 0.3$ ومنه $0,2 < 2~ < 0.6$ ومنه $e^{0,2} < e^{2~} < e^{0,6}$ ومنه $e^{0,2}-1 < e^{2~}-1 < e^{0,6}-1$ ومنه $\frac{2}{e^{0,2}-1} < \frac{2}{e^{2~}-1} < \frac{2}{e^{0,6}-1}$ ومنه

$e^{\frac{2}{e^{0,2}-1}} < e^{\frac{2}{e^{2~}-1}} < e^{\frac{2}{e^{0,6}-1}}$ ومنه $e^{e^{0.2-1}}-1 < e^{e^{2~-1}}-1 < e^{e^{0.6-1}}-1$ ومنه $\frac{1}{e^{e^{0.6-1}}-1} < h(~) < \frac{1}{e^{\frac{2}{e^{0.2-1}}}-1}$ ومنه

$\frac{1}{e^{2.43273843}-1} < h(~) < \frac{1}{e^{9.033311132}-1}$ ومنه $1.2\times10^{-4} < h(~) < 0.096$