تصحيح الواجب المنزلي رقم 05

التمرين الاول :

/1 $7x + 65y = 2009$ (1).............

أ) اثبات انه اذا كانت الثنائية (x , y) حلا للمعادلة (1) فان y مضاعف للعدد 7

لدينا (x , y) حل للمعادلة (1) يعني $7x + 65y = 2009$ يعني $65y = 2009-7x$ يعني $65y = 7(287-x)$

وحسب نظرية غوص $7 / 7(287-x)$ أي $7 / 65y$ و $7 \wedge 65 = 1$ إذن $7 / y$ و منه y مضاعف لـ 7

ب) حل المعادلة (1)

بما ان y مضاعف للعدد 7 فان $y=7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

بالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نجد $7x = 2009 - 65 \times 7k$ ومنه $x = 287- 65k$

اذن حلول المتراجحة (1)هي الثنائيات $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ x = 287 - 65k \ ; \ y = 7k \quad / \ k \in \mathbb{Z}\}$

/2 دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 9.

لدينا $2^1 \equiv 2[9]$, $2^2 \equiv 4[9]$, $2^3 \equiv 8[9]$, $2^4 \equiv 7[9]$, $2^5 \equiv 5[9]$, $2^6 \equiv 1[9]$

بواقي قسمة 2^n على 9 تشكل متتالية دورية دورها 6.

من اجل $n = 6k'$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 1 ، من اجل $n = 6k'+1$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 2

من اجل $n = 6k'+2$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 4 ، من اجل $n = 6k'+3$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 8

من اجل $n = 6k'+4$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 7 ، من اجل $n = 6k'+5$ $k' \in \mathbb{N}$ الباقي 5

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9

لدينا $2^{6n} \equiv 1[9]$

اذن $2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9]$ معناه $1 + 3n + 2 \equiv 0[9]$ معناه $3n + 3 \equiv 0[9]$ معناه $3n \equiv -3[9]$ معناه $3n \equiv 6[9]$ معناه $n \equiv 2[3]$

أي $n = 3\sim + 2$ حيث $\sim \in \mathbb{N}$

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n $U_n = 2^{6n} - 1$

ا) التحقيق ان U_n يقبل القسمة على 9

لدينا $2^{6n} \equiv 1[9]$ ومنه $2^{6n} - 1 \equiv 1 - 1[9]$ ومنه $2^{6n} - 1 \equiv 0[9]$ أي $2^{6n} - 1$ يقبل القسمة على 9

ب) حل المعادلة (2) $(7U_1)x + (U_2)y = 126567$ حيث $U_1 = 63$; $U_2 = 4095$

(2يكافئ $7 \times 63x + 4095y = 126567$ يكافئ $7x + 65y = 2009$

مجموع الحلول هي $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x = 287 - 65k \ ; \ y = 7k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

جـ)تعيين الثنائية (x_0 , y_0) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \geq 25$

لدينا $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 25$ أي $287 - 65k \geq 0$ و $7k \geq 25$ أي $k \leq 4,41$ و $k \geq 3,57$ أي $3,57 \leq k \leq 4,41$ أي k=4

ومنه $x_0 = 27$ و $y_0 = 28$

التمرين الثاني

1)اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13

لدينا $3^3 \equiv 1[13]$ ومنه $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $3^{3n} - 1 \equiv 0[13]$

2) لدينا $3^{3n} - 1 \equiv 0[13]$ ومنه $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ ومنه $3^{3n+1} - 3 \equiv 0[13]$

$3^{3n} - 1 \equiv 0[13]$ ومنه $3^{3n+2} - 9 \equiv 0[13]$

(3 $3^1 \equiv 3[13]; 3^2 \equiv 9[13]; 3^3 \equiv 1[13]$

من اجل $n = 3k$ $k \in \mathbb{N}$ الباقي 1 . من اجل $n = 3k+1$ الباقي 3 . من اجل $n = 3k+2$ الباقي 9 .

استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

لدينا $2005 \equiv 3[13]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 3^{2010}[13]$ مع $2010 = 3 \times 670$ اذن الباقي 1

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي p $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$

ا) من اجل $p=3n$ لدينا $A_{3n} = 3^{3n} + (3^{3n})^2 + (3^{3n})^3$

مع $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $(3^{3n})^2 \equiv 1[13]$ ومنه $(3^{3n})^3 \equiv 1[13]$ اذن $A_{3n} \equiv 3[13]$

ب)لدينا من اجل p=3n+1 $A_{3n+1}=3^{3n+1}+\left(3^{3n+1}\right)^2+\left(3^{3n+1}\right)^3$

مع $3^{3n+1}\equiv 3[13]$ ومنه $\left(3^{3n+1}\right)^2\equiv 9[13]$ ومنه $\left(3^{3n+1}\right)^3\equiv 1[13]$ اذن $A_{3n+1}=0[13]$

جـ) لدينا من اجل p=3n+2 $A_{3n+2}=3^{3n+2}+\left(3^{3n+2}\right)^2+\left(3^{3n+2}\right)^3$

مع $3^{3n+2}\equiv 9[13]$ ومنه $\left(3^{3n+2}\right)^2\equiv 3[13]$ ومنه $\left(3^{3n+2}\right)^3\equiv 1[13]$ اذن $A_{3n+2}=0[13]$

5) لدينا $a=\overline{1001001000}=1\times 3^9+1\times 3^6+1\times 3^3=3^3+3^6+3^9$ وهي من الشكل A_p من اجل p=3 اذن الباقي على 13 هو 3

ولدينا $b=\overline{1000100010000}=1\times 3^{12}+1\times 3^8+1\times 3^4=3^4+3^8+3^{12}$ وهي من الشكل A_p من اجل p=4 اذن الباقي على 13 هو 0

التمرين الثالث

1)نعتبر المعادلة (E) .... $13x-7y=-1$

حل المعادلة (E)

لدينا (1، 2) حل خاص للمعادلة (E) اذن

$$13x-7y=-1$$
$$13\times 1-7\times 2=-1$$
$$13(x-1)-7(y-2)=0$$

اذن

وبالتالي $13(x-1)=7(y-2)$

$7/13(x-1)$ و $7\wedge 13=1$ إذن $7/(x-1)$ $x=7k+1$

$k\in\mathbb{Z}$

$13/7(y-2)$ و $13\wedge 7=1$ إذن $13/(y-2)$ $y=13k+2$

2)تعيين الأعداد الصحيحة النسبية a حيث $\begin{cases}a\equiv -1[7]\\ a\equiv 0[13]\end{cases}$ يعني $\begin{cases}a=7m-1\\ a=13n\end{cases}$ ومنه $7n-1=13n$

ومنه $13n-7m=-1$ ..... (المعادلة E)

ومنه $n=7k+1$ و $m=13k+2$

بالتعويض عن قيمة m نجد $a=7(13k+2)-1$ ومنه $a=91k+13$ $k\in\mathbb{Z}$

3) بواقي القسمة 9^n على 7

$9\equiv 2[7]$, $9^2\equiv 4[7]$, $9^3\equiv 1[7]$

ومنه اذا كان n=3k الباقي 1 , اذا كان n=3k+1 الباقي 9 , اذا كان n=3k+2 الباقي 3.

4) لدينا $b=\overline{\sim 00\quad 086}^{9}=9^6\sim+9^3\quad+78$ حيث $0<\sim<9$; $0\leq\quad<9$

$b\equiv 0[91]$ معناه $9^6\sim+9^3\quad+78\equiv 0[91]$

معناه $\sim+\quad-13\equiv 0[91]$

معناه $\sim+\quad\equiv 13[91]$

معناه $\sim+\quad=13$ وعليه $(\sim,\quad)\in\{(5,8),(8,5),(6,7),(7,6)\}$