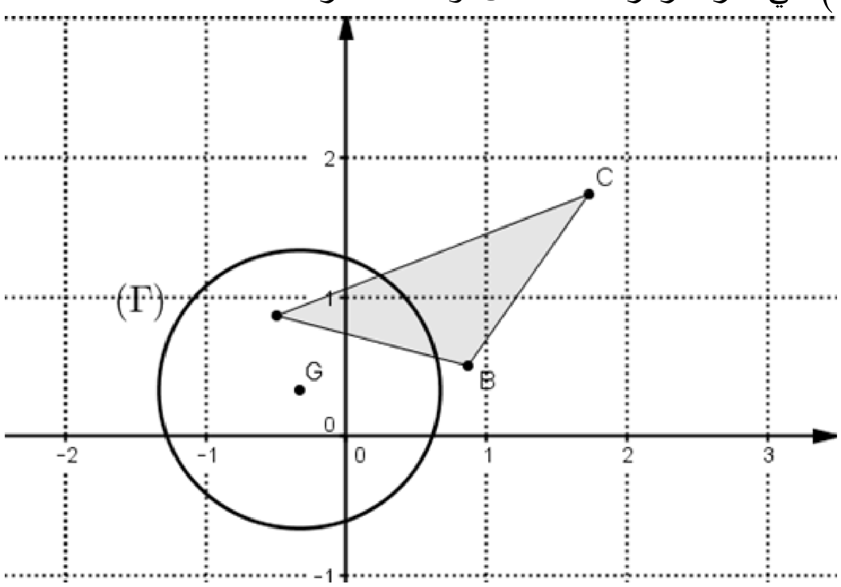
تصحيح البكالوريا التجريبي ماي 2014
لمادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الثاني

من إنجاز الأستاذ :ثابت إبراهيم

16/05/2014

<table>
<tr><th>الإجابة</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول :</td><td>04 نقاط</td></tr>
<tr><td>
• لدينا : $z_0=r\left(-\cos\theta+i\sin\theta\right)$ ، $z_1=r^2\left(\sin\theta+i\cos\theta\right)$ و $z_2=\sqrt{3}\left(1+i\right)$
حيث $r\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\theta\in\left[0;\pi\right]$
1) كتابة الأعداد z_1,z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :
• لدينا : $z_0=r\left(\cos\left(\pi-\theta\right)+i\sin\left(\pi-\theta\right)\right)$
$z_1=r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$
$z_2=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
</td><td>3×0.5</td></tr>
<tr><td>
2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$
• لدينا : $\overline{z_0}=r\left(\cos\left(-\pi+\theta\right)+i\sin\left(-\pi+\theta\right)\right)$
- $z_1=\overline{z_0}$ معناه
$r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=r\left(\cos\left(-\pi+\theta\right)+i\sin\left(-\pi+\theta\right)\right)$
ومنه : $\begin{cases}r^2=r\\ \frac{\pi}{2}-\theta=-\pi+\theta+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$ أي
$\begin{cases}r^2-r=0\\ -2\theta=-\frac{\pi}{2}-\pi+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$
وبالتالي : $\begin{cases}r=0\vee r=1\\ -2\theta=-\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$ إذن $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}-k\pi\left(k\in\left\{0;1\right\}\right)\end{cases}$
من أجل $k=0$ نجد : $\theta=\frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنَ $\theta\in\left[0;\pi\right]$)
من أجل $k=1$ نجد $\theta=\frac{3\pi}{4}-\pi$ (مرفوض)
$z_1=\overline{z_0}$ معناه $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$
</td><td>0.75</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0.25</td><td>ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :
• لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$
$\frac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>0.25</td><td>أي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$
• إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$
وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>3) لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$
• إذن : $z_0=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$
• لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+\cancel{i\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}+i-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{i\sqrt{3}}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$</td></tr>
<tr><td>0.75</td><td>ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):
• لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$
ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$
وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$

</td></tr>
</table>

التمرين الثاني	04 نقاط
لدينا : $(E): 5x-6y=3$ **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $3\wedge 5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	0.25
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\frac{5\times3-3}{6}=\frac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)	0.5
• **حل المعادلة (E):** لدينا : $5x-6y=5\times3-6\times2$ يكافئ $5x-5\times3=6y-6\times2$ أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k\,(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2\,(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$	0.5
ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ • $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$	0.75
2- لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$ • **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E):** - لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\leq2$ و $\beta\leq4$	0.75
• **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$** ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة	0.75

04 نقاط	التمرين الثالث
0.5	لدينا : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$ **1) البرهان على أنَ المثلث ABC قائم :** - لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$ ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$ إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A .
0.5	**2) البرهان على أنَ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :** • لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) - إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$ - نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$ وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A**
0.5	**3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :** لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x-3z+d=0$ - تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$
0.5	**4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :** • لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$ - نضع : $z=t$ وبالتالي : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta): \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$
0.5	**5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)** • **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن : - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$ - **وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)**

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: $v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$ - لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ - أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $\quad v_{ABCD}=27uv$	0.5
ج) تبيان أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$: - لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و$\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$ - ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$	0.5
د) حساب مساحة المثلث BDC : - $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$ - استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC): لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$ ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\quad d\left(A,(BDC)\right)=3$	0.5
التمرين الرابع	**08 نقاط**
I. لدينا : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ 1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$	0.25
• تبيان أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$: لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$	0.25

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x^2}{e^x}\times\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e}\times\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\end{cases}$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

0.5

- **لدينا :** $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

- **جدول التغيرات :**

0.5

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

0.25

- لدينا :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

0.5

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

0.5

- **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

4) **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:**

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 1\times(x-1) - 1 = x - 2$ أي $(T): y = x - 2$

0.5

5) **تبيان أنَ $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:**

- لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

- **استنتاج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$:

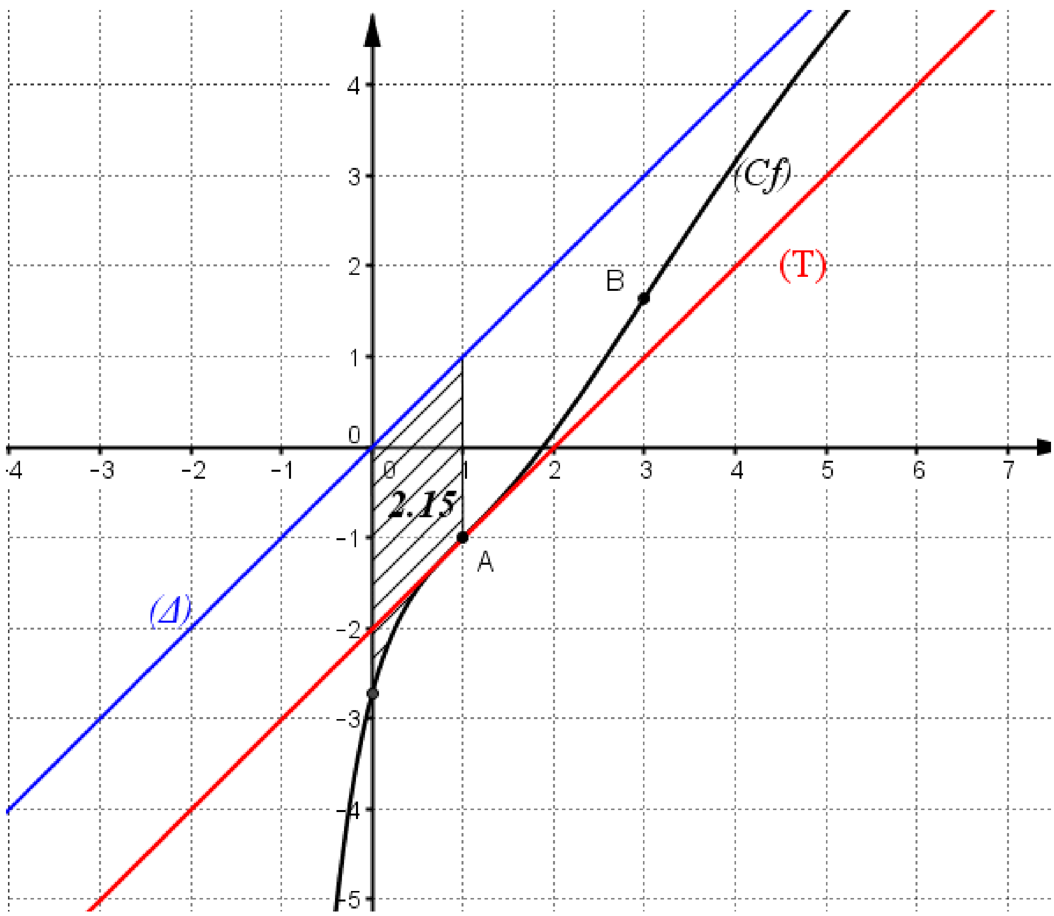
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1; f(1)), B(3; f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحنى (C_f)

01

6) **حساب $f(3), f(0)$:** $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$

الرسم :



01

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$ • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و(Δ) . • إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .	0.5
II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$ **1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:** • لدينا : $G'(x)=-[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}]=-(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1})=xe^{-x+1}=g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.	0.5
ب) **حساب I_1** : • لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=[-(x+1)e^{-x+1}]_0^1=-2e^0+e=e-2$	0.25
2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ • لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$ نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=[-x^{n+1}e^{-x+1}]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n(-e^{-x+1})dx$ ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$	0.5
ب) حساب I_2: $I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$	0.25
3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1,x=0$: $S=\int_0^1[y-f(x)]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$ أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+[-e^{-x+1}]_0^1$ $S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$	0.5