تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

	الإجابة النـــموذجية الموضوع الأول	السلم

حل التمرين الاول :

أعداد مركبة و تحويلات نقطية

1) لدينا المعادلة $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$ تكافئ $z^2-3\sqrt{3}\,z+9=0$

$\Delta=-9=9i^2$ وعليه الحلين هما $z'=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ، $z''=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

2) أ- لدينا : $z_A=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ولدينا $OA=OB=3$ ومنه A و B تنتميان لنفس الدائرة (Γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .

ب) لدينا $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ ومنه $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ أي $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

3) أ- لدينا : $z_{A'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_{B'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{-i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) لدينا : $\frac{z_{A'}}{z_B}=\frac{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}{3e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\pi}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)=\pi+2\pi k$ أي $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)=\pi+2\pi k$ ومن جهة أخرى: $OA'=OB=3$ ومنه النقطتان B و A' متناظرتان بالنسبة إلى النقطة O

$[A'B]$ قطر للدائرة (Γ) و بما أن A تنتمي الى (Γ) فإن المثلث ABA' قائم في A .

حل التمرين الثاني :

المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

1) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

ب) لدينا : $f(x)=x$ معناه $6-\frac{5}{x+1}=x$ ومنه $-x^2+5x+1=0$ معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=29$

وحليها $x_1=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ (مقبول) ، $x_2=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$ (مرفوض) إذن $\alpha=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

جـ) لدينا : $x\in[0;\alpha]$ معناه $0\le x\le\alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن

$f(0)\le f(x)\le f(\alpha)$ أي $0\le 1\le f(x)\le\alpha$ أي $f(x)\in[0;\alpha]$

وبالمثل لدينا : $x\in[\alpha;+\infty[$ معناه $x\ge\alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن

$f(x)\ge f(\alpha)$ أي $f(x)\ge\alpha$ ومنه $f(x)\in[\alpha;+\infty[$

2) أ- تمثيل الحدود :

ب) يظهر ان المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة ومتقاربة

جـ) البرهان بالتراجع : نسمي $P(n)$ الخاصية $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

- من اجل $n=0$ لدينا $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ أي $0 \le 0 \le 1 \le \alpha$ وهي محققة

- نفرض صحة $P(n)$ أي $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$

لدينا : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن

$f(0) \le f\left(u_n\right) \le f\left(u_{n+1}\right) \le f(\alpha)$ أي $0 \le 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

د) لدينا : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$ و هذا يعني أن : $\left(u_n\right)$ متزايدة .

بمأن $\left(u_n\right)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة نحو العدد l والذي يحقق $f(l)=l$ أي $l=\alpha$

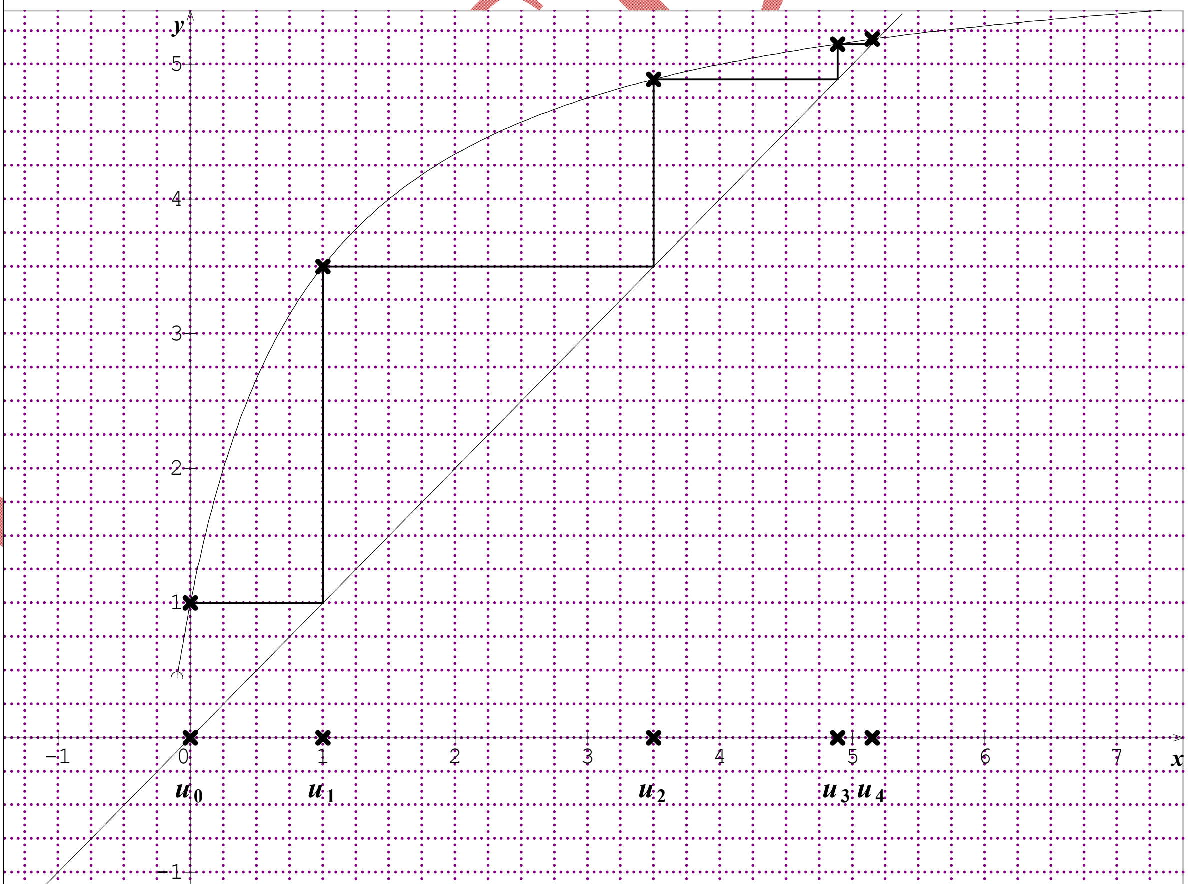
إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

3) المناقشة :

- إذا كان $u_0 \in [0,\alpha[$ فإن $\left(u_n\right)$ متزايدة ومتقاربة نحو α

- إذا كان $u_0 = \alpha$ فإن $\left(u_n\right)$ ثابتة ومتقاربة نحو α

- إذا كان $u_0 \in [\alpha;+\infty[$ فإن $\left(u_n\right)$ متناقصة ومتقاربة نحو α



المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

الهندسة الفضائية

حل التمرين الثالث :

1.أ) بيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

$\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$ و ومنه الشعاعان غير مرتبطين خطيا و النقط ليست في استقامية

ب – البرهان أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-3+4-1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-5-2+7=0$ ومنه $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي (ABC) .

جـ- للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل : $x-y-z+d=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ نجد : $d=1$ **ومنه**

معادلة المستوي (ABC) **هي :** $x-y-z+1=0$

2.أ - كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ). $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

ب- تعيين إحداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

لدينا : $O'(x;y;z)=(\Delta)\cap(ABC)$

بتعويض كلا من x ، y و z في معادلة المستوي نجد : $t+t+t+1=0$ أي : $t=-\dfrac{1}{3}$

و منه : $O'\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

3.نرمز بـ H الى المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) . t عدد حقيقي حيث : $\overrightarrow{BH}=t\ \overrightarrow{BC}$

أ– البرهان أن : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.

لدينا :
$$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HO}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\vec{0}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=t\times\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}^2=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$$
ومنه : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

ب– استنتاج العدد الحقيقي t و إحداثيات النقطة H.و لتكن : $H(x_H;y_H;z_H)$

لدينا : $\overrightarrow{BO}(2;6;5)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ ، $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}=\dfrac{2\times(-2)+6\times6+(-5)\times(-8)}{\left(\sqrt{4+36+64}\right)^2}=\dfrac{72}{104}=\dfrac{9}{13}$

لدينا : $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ ، $\overrightarrow{BH}(x_H+2;y_H+6;z_H-5)$ و بما أن : $\overrightarrow{BH}=t\ \overrightarrow{BC}=\dfrac{9}{13}\overrightarrow{BC}$ نستنتج :

$\begin{cases} x_H+2=\dfrac{9}{13}\times(-2) \\ y_H+6=\dfrac{9}{13}\times6 \\ z_H=\dfrac{9}{13}\times(-8) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x_H=-\dfrac{44}{13} \\ y_H=-\dfrac{24}{13} \\ z_H=-\dfrac{7}{13} \end{cases}$ **و عليه تكون إحداثيات النقطة هي :** $H\left(-\dfrac{44}{13};-\dfrac{24}{13};-\dfrac{7}{13}\right)$

حل التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x+\ln\left|e^x-1\right|$

	1) أ – حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ب – حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)$ و تفسير هندسيا النتيجة . $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$	
الدوال الأسية و حساب الدوال اللوغاريتمية	2) بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$ ، دراسة اتجاه تغير الدالة f على كل م جال من مجالي تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها.	

الدالة f قابلة للإشتقاق على كلا من المجالين و دالتها المشتقة حيث :

$$f'(x)=1+\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^x-1+e^x}{e^x-1}=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$$

$f'(x)=0$ معناه : $2e^x-1=0$ أي : $2e^x=1$ و منه : $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$ و إشارتها تعتمد على إشارة البسط و المقام .

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
e^x-1		-		-	‖	+	
$2e^x-1$		-	0	+	‖	+	
$f'(x)$		+		-	‖	+	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\ln 2)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\boxed{f(-\ln 2)=-2\ln 2}$

3) البرهان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(-(e^x-1)\right)=\ln 1=0$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]$ و منه **المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$**

4) أ) بيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$ ثم استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

لدينا : $f(x)=x+\ln\left|e^x-1\right|=x+\ln\left(e^x-1\right)=x+\ln\left(e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right)$

$$=x+\ln e^x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=2x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$$

و من جهة أخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)=\ln 1=0$ و عليه **المنحني** (C_f) **يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته** $y=2x$ **بجوار** $+\infty$ **.**

ب) تحديد نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

$f(x)=y$ معناه : $x+\ln\left|e^{x}-1\right|=x$ أي : $\ln\left|e^{x}-1\right|=0=\ln 1$ ومنه :

$e^{x}-1=1$ أي $e^{x}=2$ و منه : $x=\ln 2$ أو $-\left(e^{x}-1\right)=1$ أي $e^{x}=0$ و هي مستحيلة الحل.

$$(\Delta)\cap(C_f)=\left\{A(\ln 2;\ln 2)\right\}$$

جـ) التحقق من أن معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln(2)$ هي: $y=3x-2\ln(2)$

لدينا : $y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)=3(x-\ln 2)+\ln 2=3x-2\ln 2$

5) أ) البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و الذي يحقق أن: $0{,}4\prec\alpha\prec 0{,}5$

لدينا $f(0.4)\simeq$ ، $f(0.5)\simeq$ و f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و بصفة خاصة على المجال $]0.4;0.5[$.**والعدد** 0 **محصور بين** $f(0.4)$ **و** $f(0.5)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	

ب)البرهان أن العدد α يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

لدينا : $f(\alpha)=0$ معناه : $\alpha+\ln\left(e^{\alpha}-1\right)=0$ أي : $\ln e^{\alpha}+\ln\left(e^{\alpha}-1\right)=\ln 1$ و بالتالي :

$\ln e^{\alpha}\times\left(e^{\alpha}-1\right)=\ln 1$ و هكذا نجد : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

6)رسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).

0.5