تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

الإجابة النـــموذجية الموضوع الثاني

السلم

أعداد مركبة و تحويلات نقطية

حل التمرين الأول:

1.لدينا : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

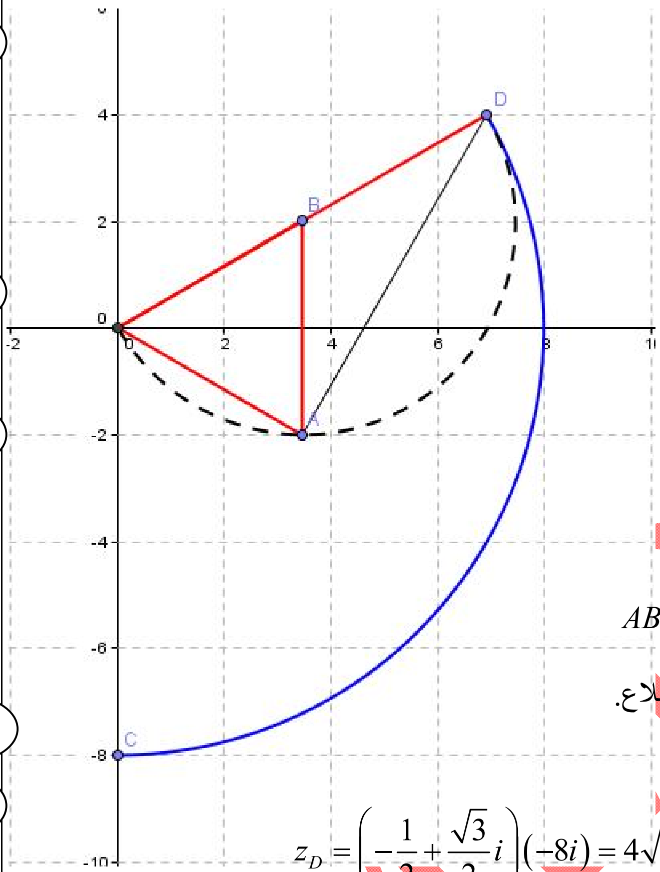
$\Delta=-16=16i^2$ ، $z_1=\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{2}=2\sqrt{3}-2i$ — 01

، $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{3}+2i$

2. أ) $z_B=2\sqrt{3}+2i=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ — 01

$z_A=2\sqrt{3}-2i=\overline{z_B}==4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب) أنظر الشكل — 0.5



ت) لدينا : $OA=|z_A|=4$ ، $OB=|z_B|=4$

ث) ومن جهة أخرى :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2\sqrt{3}+2i-(2\sqrt{3}-2i)\right|=|4i|=4$

ومنه $OA=OB=AB$ و المثلث OAB متقايس الأضلاع. — 0.5

3.- تعليم النقطتان C و D أنظر الشكل . — 0.5

- لدينا : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ ومنه : $z_D=$ $z_D=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-8i)=4\sqrt{3}+4i$ — 0.5

4.نلاحظ أن : $z_D=2z_B$ و بعبارة أخرى : $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ و هذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك h مركزه O و نسبته 2 . — 0.5

5. لدينا : $\dfrac{z_A-z_D}{z_A}=\dfrac{2\sqrt{3}-2i-\left(4\sqrt{3}+4i\right)}{2\sqrt{3}-2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}-2i}=-i\sqrt{3}$ ومنه :

$\arg\left(\dfrac{z_A-z_D}{z_A}\right)=\arg\left(-i\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ أي : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ — 0.5

و المثلث OAD قائم في A .

حل التمرين الثاني :

1.بيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

$\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-5}{-1}$ ومنه الشعاعان غير مرتبطين خطيا و النقط ليست في استقامية — 01

الهندسة الفضائية

2. أ – البرهان أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

0.5 لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2\times1-1\times(-1)-1\times3=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times2-1\times(-5)+3\times(-3)=0$ ومنه $\vec{u}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي (ABC) .

0.75 ب- للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل : $2x-y+3z+d=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ نجد : $d=1$

ومنه معادلة المستوي (ABC) **هي :** $2x-y+3z+1=0$

0.75 جـ -كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) . $\begin{cases}x=7+2t\\ y=-1-t\\ z=4+3t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

د- تعيين إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC)

بتعويض كلا من x ، y و z في معادلة المستوي نجد : $2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0$ أي : $t=-2$

0.5 **و منه :** $H(7+2\times(-2);-1+2;4+3\times(-2))$ أي : $H(3;1;-2)$

3) أ – البرهان أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .

0.5 لدينا : $\vec{n}_{(P)}(1;1;1)$ و $\vec{n}_{(Q)}(1;4;0)$ نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا و بالتالي (P) و (Q) متقاطعان .

0.5 ب- لدينا : $\begin{cases}x+y+z=0\\ x+4y+2=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x+t+z=0\\ y=t\\ x+4t+2=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=4t-2\\ y=t\\ z=3t+2\end{cases}$ و $(t\in\mathbb{R})$ (بوضع $y=t$)

0.5 جـ - شعاع توجيه المستقيم (D') هو : $\vec{u}(-4;1;3)$ و لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=-4\times2+1\times(-1)+3\times3=0$ و منه المستقيم (D') و المستوي (ABC) متوازيان و بالإضافة الى ذلك النقطة $E(-2;0;-2)$ من (D') من أجل $(t=0)$ لا تحقق معادلة (ABC) إذن هما متوازيان تماما.

حل التمرين الثالث :

- دراسة تغيرات الدالة f

0.25 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\ln x)=+\infty$

0.25 الدالة قابلة للإشتقاق على المجال و لدينا : $f'(x)=1-\left(1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x\right)=-\ln x$

$f'(x)=0$ معناه $-\ln x=0$ أي $x=1$

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$.

حساب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم وضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

0.75 $u_1=e\simeq2.71$ ، $u_2=\frac{e^2}{4}\simeq1.85$ ، $u_3=\frac{e^3}{27}\simeq074$ ، $u_4=\frac{e^4}{256}\simeq0.21$ ، $u_5=\frac{e^5}{3125}\simeq0.05$

المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

يظهر أن $\left(u_n\right)$ متناقصة و نهايتها تؤول الى 0

3.أ- اثبات أن $v_n = n - n\ln\left(n\right)$.

0.5

لدينا : $v_n = \ln\left(u_n\right) = \ln\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right) = \ln e^n - \ln n^n = n\ln e - n\ln\left(n\right) = n - n\ln\left(n\right)$

ب- باستعمال الدالة f ،دراسة إتجاه تغير $\left(v_n\right)$ ثم استنتاج أن $\left(u_n\right)$ متناقصة .

0.75

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $v_n = f(n)$ و الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و بالتالي $\left(v_n\right)$ متناقصة تماما .

بما أن $u_n = e^{v_n}$ و الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن اتجاه تغير $\left(u_n\right)$ هو اتجاه تغير $\left(v_n\right)$

أي : $\left(u_n\right)$متناقصة تماما .

جـ - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 \prec u_n \leq e$

0.5

المتتالية $\left(u_n\right)$متناقصة تماما و موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $0 \prec u_n \leq u_1 = e$ أي أن : $\left(u_n\right)$محدودة .

د- استنتاج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة و تعيين نهايتها .

0.5

المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة. و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(n) = -\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

I) درسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها. $g(x) = x+1-e^{-x}$

01

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-e^x\right) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x) = 1-e^x$ و التي تنعدم من أجل $x=0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

0.5

بما أن الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى $g(0)=0$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \leq 0$.

الدوال الأسية و حساب الدوال الأصلية

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$.

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ — 0.25

ب). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{e^x}=-2\times 0=0$ ، $y=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f). — 0.5

جـ) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$ ، تعيين إشارة $f'(x)$

الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=(-4x-1)e^{-x}-e^{-x}\left(-2x^2-x+1\right)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$ — 01

$f'(x)=0$ معناه : $2x^2-3x-2=0$ ، $\Delta=25\succ 0$ ، $x'=-\frac{1}{2}$ ، $x''=2$

د) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\frac{1}{2})$	↘	$f(2)$	↗	0

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(2)=-9e^{-2}=-\frac{9}{e^2}$ — 0.5

3) أ) تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=-2x+1$ — 0.5

ب) من أجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)-(1-2x)=(-2x+1)(x+1)e^{-x}-(1-2x)=(1-2x)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]$

$f(x)-(1-2x)=(1-2x)\left(\frac{x+1}{e^x}-1\right)=(1-2x)\left(x+1-e^x\right)e^{-x}$

$f(x)-(1-2x)=\left(-2x+1\right)g(x)e^{-x}$

جـ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-2x+1)$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
$-2x+1$		+		+	0	-	
$g(x)$		-	0	-		-	
$f(x)-(-2x+1)$		-	0	-	0	+	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (T)		(C_f) تحت (T)		(C_f) فوق (T)	

— 0.5

4) أ) دراسة تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الفواصل

$f(x)=0$ معناه $-2x^2-x+1=0$ أي : $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$. — 0.25

ب) رسم (C_f) و (T) على المجال $[-1;+\infty[$.

5) F الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\mathrm{F}(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

لدينا : $\mathrm{F}'(x)=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}\left(ax^2+bx+c\right)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b+c\right)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $a=2$ ، $b=5$ ، $c=4$ إذن : $\mathrm{F}(x)=\left(2x^2+5x+4\right)e^{-x}$ — 0.5

0.75