اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 3ساعات ونصف

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A, B, C لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$.

-1 أ) بين أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عين طبيعة المثلث ABC .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC. أرسم (C).

-2 أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

-3 ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثاني :(05نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;4;-5)$, $B(3;2;-4)$, $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1) بيَن أنَ $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$.

أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) و استنتج أنَ (S) مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له .

ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

☜ **التمرين الثالث (04 نقاط)**

(u_n) **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- **أحسب** u_3, u_2, u_1.

2- ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le n+3$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ **ثم أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- **نضع** : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$ **و** $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

– **أحسب بدلالة** n **المجموع** S_n **ثم أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

☜ **التمرين الرابع (07 نقاط)**

I. نعتبر الدالة العددية g **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \ge 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **أحسب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ **ثم لستنتج اتجاه** تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3- **أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-1)\right]$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) **ذي المعادلة** $y = x - 1$.

5- أ) بين أن $I(2;3)$ **نقطة انعطاف للمنحني** (C_f).

ب) بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$.

ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) **أحسب** $f(-1)$ **ثم أرسم** (T)، (Δ) **و** (C_f).

6- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$.

7- نعتبر الدالة العددية F **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f **على** $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير .

☜ الموضوع الثاني

☜ التمرين الأول (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(3;-2;2\right)$, $B\left(6;1;5\right)$ و $C\left(6;-2;-1\right)$

و المستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .
2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .
3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .
4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').
5) أ) نعتبر النقطة $D\left(0;4;-1\right)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC).

☜ التمرين الثاني :(04 نقاط)

نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث ، $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$.

1) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A, B و E التي لواحقها z_1 ، z_2 و $z_3=z_1+z_2$ على الترتيب .

أ) برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين .

ب) استنتج أن الرباعي $OAEB$ مربع .

3) أ) بين أن : $OE=2\sqrt{6}$ و أن $\left(\vec{u};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{5\pi}{12}$.

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ج) أحسب z_3^{2016} .

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

☜ التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

☜ **التمرين الرابع :(07 نقاط)**

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g.

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 - x - \dfrac{2}{x}(1+\ln x)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

ج) بيَن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.41 < \alpha < 0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

3- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E): f(x) = m - x$.

❀ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2014 ❀أساتذة المادة