الموضوع الأول(1)

♣ التمرين الأول :

I- $(E)..z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$

1. نضع $z=yi$ مع y عدد حقيقي.

$z=yi$ حل للمعادلة يعني أن :

$$-iy^3+4y^2+\alpha y^2 i+13yi-4\alpha y-13\alpha i=0$$

و هذا يكافئ $\begin{cases}4y^2-4\alpha y=0\\ -y^3+\alpha y^2+13y-13\alpha=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}4y(y-\alpha)=0\\ y^2(y-\alpha)-13(y-\alpha)=0\end{cases}$ إذن $y=\alpha$

ومنه الحل التخيلي للمعادلة (E) هو $z=i\alpha$.

2. (E) تكافئ $(z-\alpha i)(z^2-4z+13)=0$.

أي $a=-4$ و $b=13$.

3. (E) تكافئ $z-\alpha i=0$ أو $z^2-4z+13=0$.

أي $z=\alpha i$ أو $(z-2)^2=9i^2$.

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $\boxed{2+3i \text{ ، } 2-3i \text{ ، } \alpha i}$.

II- لدينا النقط A ، B ، C و G حيث $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}=2-3i$ و $z_G=5$.

1. $S(B)=E$ يكافئ $z_E-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_A)$.

أي $z_E=\frac{1}{2}(1+i)(2+3i-\alpha i)+\alpha i$ ومنه

$$z_E=\frac{1}{2}(2+3i-\alpha i+2i-3+\alpha+2\alpha i)$$

إذن: $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$.

2. لدينا $r(G)=F$ و $z_I=1+\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)i$.

ومنه $z_F-z_I=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_G-z_I)$

أي $z_F=-i(5-1-\frac{3+\alpha}{2}i)+1+\frac{3+\alpha}{2}i$

إذن : $z_F=\left(\frac{-1-\alpha}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)$.

3. حساب z_G-z_A و z_F-z_E .

$z_F-z_E=-\alpha-5i=-i(5-\alpha i)$ و

$z_G-z_A=5-\alpha i$

ومنه $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}=\frac{5-\alpha i}{-i(5-\alpha i)}=\frac{1}{-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

الاستنتاج :

بما أن $\left|\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

فإن $\boxed{EF=AG \text{ و } (EF)\perp(AG)}$.

4. أ) لدينا $z_F-z_E=-\alpha-5i$ ونحسب z_A-z_E

أي $z_A-z_E=\frac{1}{2}[(-\alpha+1)+i(\alpha-5)]$.

ومنه $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{2(-\alpha-5i)[(1-\alpha)-(\alpha-5)i]}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$

أي $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

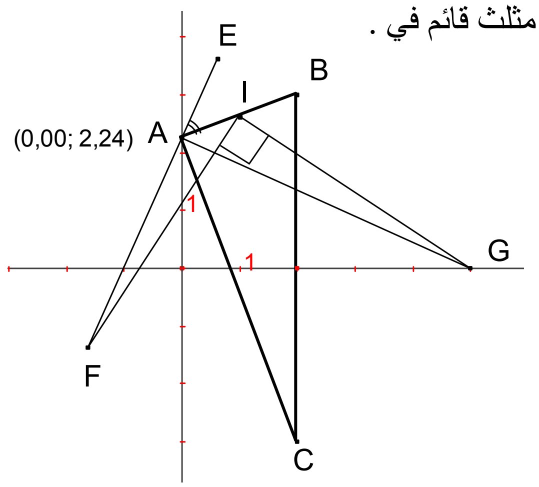
ب) A ، E و F في استقامية يعني أن العدد المركب $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}$ عددا حقيقيا.

ومنه $\begin{cases}2\alpha^2-10=0\\ (1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2\neq 0\end{cases}$

إذن $\boxed{\alpha=\sqrt{5} \text{ أو } \alpha=-\sqrt{5}}$.

جـ) من أجل $z_A=-i\sqrt{5}$ أو $z_A=i\sqrt{5}$ يمكن التحقق بسهولة أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ وعليه النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) .

د) بما أن $A\in(C)$ فإن $(AB)\perp(AC)$ ومنه ABC مثلث قائم في .



الموضوع الأول(2)

♣ التمرين الثاني:

لدينا النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$

.1 المثلث ABC متقايس الأضلاع بالفعل :

$\overrightarrow{AB}(0;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$.

ومنه $AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=AC=BC=3\sqrt{2}$.

.2 $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) بالفعل:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0(1)+3(1)+3(-1)=0$ و

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=-3(1)+3(1)+0(-1)=0$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

إذن : $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني أن $\overrightarrow{CM}.\vec{n}=0$.

أي $(x-0)+(y-5)-(z-1)=0$.

وأخيرا معادلة (ABC) هي : $\boxed{x+y-z-4=0}$.

.3 أ) G مركز ثقل المثلث ABC .

إذن :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

ومنه $G(2;4;2)$.

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) أي يمكن أن نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ)،

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases}x=2+k\\y=4+k\\z=2-k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$.

جـ) نلاحظ أن S نقطة من المستقيم (Δ).

$AS^2=AB^2$ يكافئ

$(t-1)^2+(t+2)^2+(1-t)^2=18$.

أي $3t^2+6=18$ ومنه $t\in\{2;-2\}$.

ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$.

د) F تنتمي إلى (Δ) ومنه المثلثات FGA ، FGB و FGC قائمة ومتقايسة لأن $GA=GB=GC$ ومنه $FA=FB=FC=AB$.

إذن: $FABC$ رباعي الوجوه منتظم .

• $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times FG=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)FG$.

لدينا $\overrightarrow{FG}(-2;-2;2)$ ومنه $FG=2\sqrt{3}$.

إذن : $V=9u.v$.

.4 لدينا $\overrightarrow{FA}(-1;-4;1)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$

ومنه $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{BC}=0$.

إذن : المستقيمان (FA) و (BC) متعامدان .

.5 أ) لتكن I منتصف قطعة المستقيم $[FG]$.

$\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IF}\|=6$

أي $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $2\overrightarrow{MI}=6$

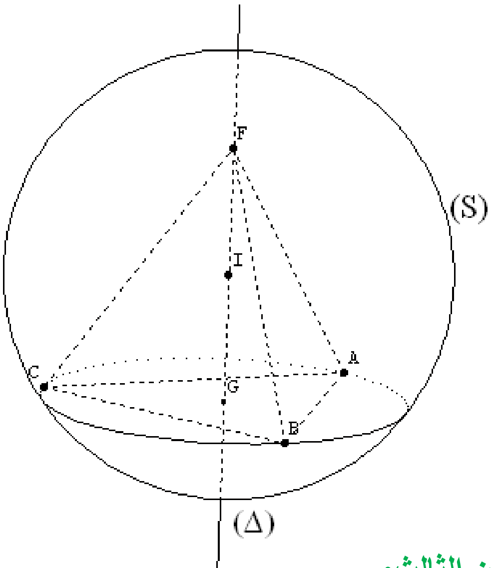
إذن:المجموعة (S) هي سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها 3 .

ب) بما أن I تنتمي إلى (Δ) فإن $IG=d(ABC;I)=\sqrt{3}$.

ومنه المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

بما أن متوسط المثلث المتقايس الأضلاع ABC يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ فإن $AG=\frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}$.

إذن : المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة المحيطة بالمثلث ABC.



♣ التمرين الثالث:

.1 f معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$

أ) $1\le\alpha\le2$.

ب)

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1 $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ -

• إذا كان $0\le x\le\alpha$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f(\alpha)=0$.

• إذا كان $x\ge\alpha$ فإن $f(x)\le f(\alpha)=0$.

(f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$)

الموضوع الأول(3)

.2 المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

أ) حساب u_1 و u_2 ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$.

$u_1=\sqrt{2}=1.414$ ، $u_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}=1.554$ و

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}=u_3=1.598$.

ب) نبرهن بالتراجع على الخاصية التالية :

من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\alpha$.

• من أجل $n=0$ ، $u_0=1$ أي $1\le u_0\le\alpha$.

• نفرض أن $1\le u_n\le\alpha$ من أجل $n\ge 0$.

• نبرهن أن $1\le u_{n+1}\le\alpha$.

لدينا $1\le u_n\le\alpha$ ومنه $2\le u_n+1\le\alpha+1$.

وبما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة فإن

$\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}$ ومنه

$1\le\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}=\alpha$

لأن $f(\alpha)=0$.

إذن : $1\le u_{n+1}\le\alpha$.

وأخيرا، من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\alpha$.

جـ) لدينا $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ و $1\le u_n\le\alpha$.

بما أن $f(x)\ge 0$ موجبة على المجال $[0;\alpha]$ فإن

$u_{n+1}-u_n\ge 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة. أي $\lim u_n=l$.

د) لدينا $\lim u_n=l$ ومنه $l=\sqrt{l+1}$ أي

$f(l)=0$ إذن : $l=\alpha$.

$f(\alpha)=0$ يكافئ $\alpha^2-\alpha-1=0$

أي $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

بما أن $u_n>0$ فإن $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (العدد الذهبي)

♣ التمرين الرابع:

k عدد حقيقي موجب تماما ، f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$.

-I g_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$.

.1 g_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$g_k'(x)=k(2+kx)e^{kx}$$

• $g_k'(x)=0$ يكافئ $2+kx=0$ أي $x=-\frac{2}{k}$.

إذن :

x	$-\infty$	$-2/k$	$+\infty$
$g_k'(x)$	-	0	+

k عدد حقيقي موجب تماما و $e^{kx}>0$.

.2 جدول تغيرات الدالة g_k.

x	$-\infty$	$-2/k$	$+\infty$
$g_k'(x)$	-	0	+
$g_k(x)$	↘	$1-e^{-2}$	↗

حسب جدول التغيرات $g_k(x)\ge 1-e^{-2}>0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x)>0$.

.1-II أ) لدينا $f_k(0)=-1$.

إذن:جميع المنحنيات (C_k) تمر بالنقطة $I(0;-1)$.

ب)

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}x(1+e^{kx})=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=+\infty$.

جـ) (D) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_k) بجوار $-\infty$ بالفعل:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)-(x-1)=\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to-\infty}kxe^{kx}=0$.

.2 • f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f_k'(x)=1+(1+kx)e^{kx}=g_k(x)>0$$

إذن : الدالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• جدول تغيراتها الدالة f_k .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	
$f_k(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الموضوع الأول(4)

3. أ) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_k):

لدينا $f_k'(0)=g_k(0)=2$ و $f_k(0)=-1$ ومنه

$$y=f_k'(0)(x-0)+f_k(0)=2x-1$$

ب) بما أن $f_k'(x)=g_k(x)$ فإن $f_k''(x)=g_k'(x)$

لدينا مما سبق $f_k''(x)$ ينعدم عند $-\frac{2}{k}$ ويغير إشارته عندها

إذن : النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k};f_k(-\frac{2}{k})\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_k)، أي $F_k\left(-\frac{2}{k};-\frac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$.

4. أ) حسب جدول التغيرات f_k دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$ و

$f_k(0)\times f_k(1)=-e^k<0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;1[$ بحيث $f_k(\alpha)=0$.

(α حل للمعادلة $f_k(x)=0$)

ب) لتكن d المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم (D).

ومنه $d=\frac{|\alpha-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$. $((\alpha-1<0))$

لدينا أيضا $f_1(\alpha)=0$ ومنه $\alpha e^{\alpha}=1-\alpha$.

إذن : $d=\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$.

5. أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f_k(x)+f_{-k}(-x)=(x-1+xe^{kx})+(-x-1-xe^{kx})$$

أي $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$.

• الاستنتاج :

إذا كانت $M(x;f_k(x))$ نقطة من (C_k) فإن $M'(-x;-f_k(x)-2)$ نقطة من (C_{-k}).

وبما أن منتصف $[MM']$ هي النقطة $I(0;-1)$ فإن (C_k) و (C_{-k}) متناظرين بالنسبة للنقطة I.

ب) المنحنى (C_{-1}).

III- $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$ ، حيث $\lambda<0$.

1. من أجل كل عدد حقيقي $x\leq 0$،

$(x-1)-f_k(x)=-xe^{kx}\geq 0$.

إذن : I_k هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x-1$.

2. $I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=e^x\end{cases}$ ومنه

$$I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx=-xe^{x}+e^{x}]_{\lambda}^{0}$$

إذن : $I_1=1+\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}$.

• $\lim_{\lambda\to-\infty} I_1=1$.

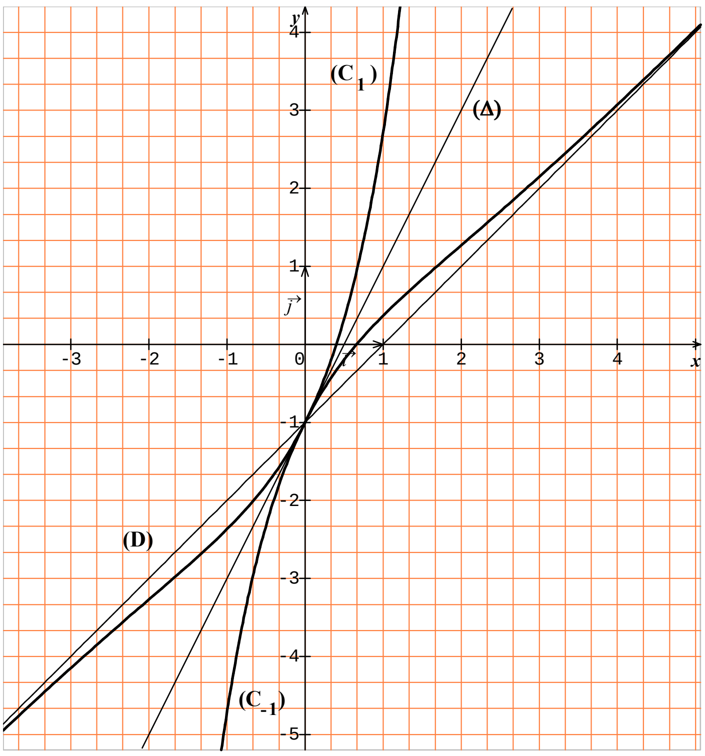
• هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_k) ومحور التراتيب والمستقيم (D) تساوي 1.

3. نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^{kx}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=\frac{1}{k}e^{kx}\end{cases}$

ومنه $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx=-\frac{x}{k}e^{kx}+\frac{1}{k^2}e^{kx}]_{\lambda}^{0}$

إذن : $I_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}\left(\lambda ke^{k\lambda}-e^{k\lambda}\right)$.

• $\lim_{\lambda\to-\infty} I_k=\frac{1}{k^2}$. ($\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)



الموضوع الثاني(1)

♣ التمرين الأول :

I- $(1)\ldots\ldots(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$

(1) يكافئ $(z+1)^2=\left[i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)\right]^2$.

أي $z+1=-i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$ أو

$z+1=i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$.

إذن : $z=\sqrt{5}-2i$ أو $z=-(2+\sqrt{5})+2i$.

II- النقط A، B و C لواحقها على الترتيب

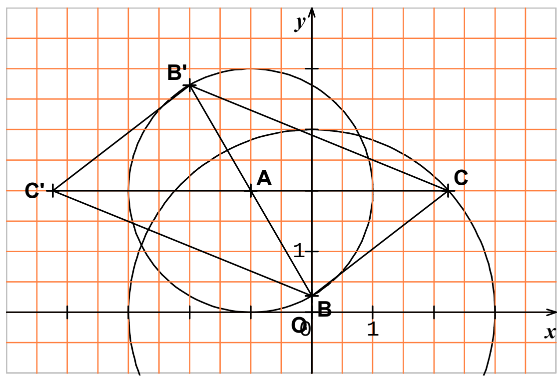
$z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\sqrt{5}+2i$

1؛ حساب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$.

• $|z_C|=\sqrt{5+4}=3$

• $|z_B-z_A|=|1-i\sqrt{3}|=2$

إذن : C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 3 و B هي تقاطع الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 مع محور التراتيب .



2. $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ ومنه

$z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(2i-i\sqrt{3}+1-2i)-1+2i$

أي $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(4)-1+2i$ وأخيرا $z_{S(B)}=\sqrt{5}+2i$

إذن : $S(B)=C$

3. أ) $z_{C'}=2z_A-z_C$ أي $z_{C'}=-2+4i-\sqrt{5}-2i$

ومنه $z_{C'}=-(2+\sqrt{5})+2i$

ب) بما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع فإن النقطة B' هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة A .

ومنه $z_{B'}=2z_A-z_B$

إذن : $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) $z_{B'}-z_C=-(2+\sqrt{5})+i\sqrt{3}$

و $z_B-z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{3}$

ومنه $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{(-2-\sqrt{5}+i\sqrt{3})(-\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{8}$

أي $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

د) لدينا :

$\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$

♣ التمرين الثاني:

I- a، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

لدينا $b+c=\overline{46}^a$ و $bc=\overline{545}^a$ ومنه

$b+c=4a+6$ و $bc=5a^2+4a+5$

b و c هما حلا المعادلة التالية :

$(1)\ldots x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$

ومنه $\Delta=4(-a^2+8a+4)$.

المعادلة (1) تقبل حلول إذا وفقط إذا كان

$-a^2+8a+4\ge0$.

$-a^2+8a+4\ge0$ يكافئ $(a-4)^2\le20$ أي

$a\in[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}]$.

بما أن عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $a=7$ أو $a=8$.

• إذا كان $a=7$ فإن $\Delta=11$ (المعادلة (1) ليس لها حل في $\mathbb{N}$.

• إذا كان $a=8$ فإن $\Delta=4$ ومنه حلا المعادلة (1) هما 17 و 21 .

بما أن $b\le c$ فإن $b=17$ و $c=21$.

وأخيرا : $\boxed{a=8 ، b=17 ، c=21}$.

الموضوع الثاني(2)

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y من $\mathbb{N}$.

1. أ) $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) يكافئ $21x_0-17x_0=8$. إذن الثنائية $(2;2)$ حل للمعادلة (1).

ب) حل المعادلة (1) في $\mathbb{N}^2$.

لدينا $\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17x_0=8\end{cases}$ ومنه

$21(x-x_0)=17(y-y_0)$ ..(2)

إذن: $17/21(x-x_0)$ و $PGCD(17;21)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص $17/(x-x_0)$ أي $(x-x_0)=17k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ومن (2) نحصل على $21(17k)=17(y-y_0)$.

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\boxed{\{(17k+2;21k+2),k\in\mathbb{N}\}}$.

2. أ) $9^0\equiv1[13]$ ، $9^1\equiv9[13]$ ، $9^2\equiv3[13]$ ، $9^3\equiv1[13]$.

من أجل كل عدد طبيعي k ، $9^{3k+r}\equiv9^r[13]$ حيث $r\in\{0;1;2\}$.

إذن : بواقي قسمة 9^n على 13 هي : 1 ، 9 ، 3.

ب) $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) يعني أن $17\beta=21\alpha-8$.

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$

$\equiv9^2-1-2[13]$

$\equiv0[13]$

3. أ) $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv0[4]$ أي و $\begin{cases}17y=4(21\lambda-2)\\x=4\lambda\end{cases}$.

إذن: $4/17y$ و $PGCD(17;4)=1$ ومنه حسب مبرهنة غوص $4/y$. أي $y\equiv0[4]$.

ب) $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) و $PGCD(x;y)=4$.

إذن : $x\equiv0[4]$ يعني أن $17k+2\equiv0[4]$ أي $k=4\gamma+2$.

ومنه $x=4(17\gamma+9)$ و $y=4(21\gamma+11)$ و $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$. و لدينا أيضا $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=PGCD(17\gamma+9;2)$.

(لأن $(x;y)$ حلول للمعادلة (1))

إذن: $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$ يعني أن $\gamma=2\beta$.

وأخيرا : من أجل كل عدد طبيعي β ، حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$ هي : $x=136\beta+36$ و $y=168\beta+44$.

♣ التمرين الثالث :

لدينا النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$

1. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$.

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4+4-8=0$ أي $(AB)\perp(AC)$.

إذن: ABC مثلث قائم في A .

2. أ) • G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

ومنه $G(0;0;-2)$.

• I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ومنه $I(2;1;0)$.

ب) لدينا $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$.

ومنه الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع.

3. أ) $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$.

ومنه $AG^2=18$ ، $BG^2=45$ و $CG^2=18$.

ب) $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$ ....(2)

باستعمال علاقة شال والمرجح G (2) تصبح :

$3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=18$

أي $2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2=18$ لأن

$2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$

إذن : (2) تكافئ $2MG^2=36$.

وأخيرا مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق(2) هي سطح كرة مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

4. (S) سطح الكرة الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

أ) $M(x;y;z)\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$.

بما أن $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{V}(-6;-6;0)$ فإن

$\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ يكافئ $6x+6y=-18$.

إذن المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $x+y+3=0$.

الموضوع الثاني(3)

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد (P)، أي $\vec{n}(1;1;0)$ الشعاع الناظمي لـ (P) هو شعاع توجيه لـ (Δ) أي نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ).

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-2 \end{cases}$ مع t عدد حقيقي.

• الاستنتاج : $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$.

ومنه $t+t+3=0$ أي $t=-\dfrac{3}{2}$.

وأخيرا : $H(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-2)$.

جـ) تعيين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

• $d(G,(P))=GH=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ ومنه

$(P)\cap(S)$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-HG^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

5. المستقيم (D) معرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$. مع k عدد حقيقي.

• $(D)\subset(P)$ لأن $(-1-2k)+(-2+2k)+3=0$.

• (D) يمر بالنقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي $\vec{u}(-2;2;-8)$

لدينا $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

أي أن E تنتمي إلى (ABC) و $\vec{u}$ شعاع من (ABC).

إذن: $(D)\subset(ABC)$. $(\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB})$

وأخيرا: المستويان (P) و(ABC) يتقاطعان في (D).

♣ التمرين الرابع :

I- • الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\dfrac{1}{x}=1$

أي $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

• نضع $X=x-1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$.

II- f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$،

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$$

ومنه $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

($\sqrt{x^2}=|x|$، $\ln ab=\ln a+\ln b$ مع $a>0$، $b>0$)

ب) من أجل $x\geq 1$،

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}$$

أي $\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$.

جـ) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1بالفعل

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{x-1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$

$(\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=0)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

إذن : المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور التراتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

2. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$.

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و

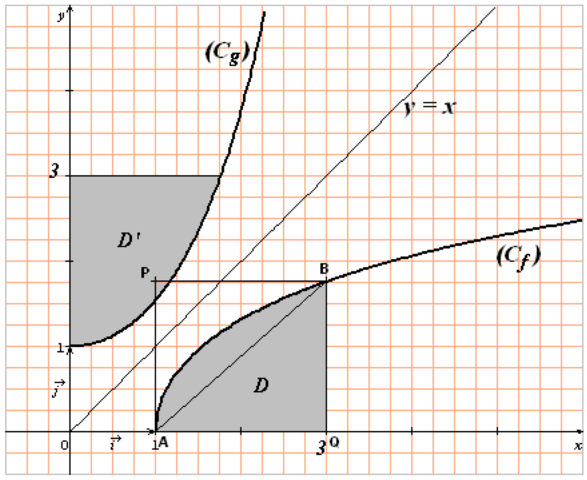
$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0.$$

•جدول تغير الدالة f.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ +	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

الموضوع الثاني(4)

جـ) المنحنى (C_f).



3. أ) النقطة A من (C_f) أي $A(1;0)$، كذلك B نقطة من (C_f) فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث $f(3)=\ln(3+2\sqrt{2})=2\ln(1+\sqrt{2})$.

• مساحة المثلث ABQ تساوي $f(3)$.

• مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي $2f(3)$.

ب) نلاحظ أن المساحة S محصورة بين مساحة المثلث ABQ و مساحة المستطيل $APBQ$.

إذن : $2\ln(1+\sqrt{2})\le S\le 4\ln(1+\sqrt{2})$

III- g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$، لدينا

$$g(x)-1=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x}=\frac{(e^x-1)^2}{2e^x}\ge 0.$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ ، $g(x)\ge 1$.

2. أ) $g\circ f(x)=g(f(x))$ ومنه

$$g\circ f(x)=\frac{e^{2f(x)}+1}{2e^{f(x)}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})}$$

أي $g\circ f(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})}=x$.

• $M(x;y)$ نقطة من (C_f) يعني أن $y=f(x)$، وبما أن $g(f(x))=x$ فإن $M'(f(x);x)$ نقطة من (C_g).

ب) بما أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$. (المنصف الأول).

3. S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) $S'=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}(3-g(x))dx$ أي

$S'=3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ومنه

$S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) حساب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$ ومنه

$$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\right]$$

و أخيرا : $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=2\sqrt{2}$.

• بما أن (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ فإن $D=D'$ و منه $S=S'$.

إذن :
$$S=S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$$
$$=6\ln(1+\sqrt{2})-2\sqrt{2}u.a$$