الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي — **ثانويّة: عبد العزيز الشريف**
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي (دورة: ماي2014) — **الشعبة: هندسة طرائق**

اختبار في مادة الرياضيات — **المـدة: 04 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول :(3.5 نقط)

في الفضاء المزوّد بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطتيْن $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$.

1. ا) احسب إحداثيّات النقطة H: مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1)\}$.

ب) بيّن أنّ (P): مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ هي مستوٍ يُطلَب تعيينه بدقة.

جـ) بيّن أنّ $y=-1$ هي معادلة ديكارتيّة لـ(P).

2. ليكن (S) سطح الكرة التي قطرها AB.

ا) تحقق أنّ إحداثيّات مركزها Ω هي $\left(-\frac{1}{3};-\frac{3}{2};-1\right)$، و أنّ نصف قطرها $R=\frac{7}{2}$.

بـ) احسب المسافة بين النقطة Ω و المستوي (P)، و استنتج أنّ المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (C).

جـ) بيّن أنّ $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$ هي معادلة للدائرة (C) في المستوي (P).

د) استنتج إحداثيّات I: مركز الدائرة (C) واستنتج نصف قطرها r.

التمرين الثاني (4نقط)

1. حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2. نعتبر، في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، C، التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\overline{z_A}$، $z_C=-\sqrt{3}-i$.

ا) عيّن z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ متوازي أضلاع.

بـ) اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركّبة : z_A، z_B، z_C.

جـ) تحقق أنّ $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962}.\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1435}.\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2014}=-i$.

د) ليكن التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' التي لاحقتها z' حيث $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+3i$.

تعرّف على طبيعة التحويل S و أعط عناصره المميّزة.

هـ) بيّن أنّ (Γ): مجموعة النقط M ذات اللاّحقة z التي تحقق: $(z-z_A)\left(\overline{z-z_A}\right)=z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

و) عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S و أعط عناصرها المميّزة.

التمرين الثالث (3 نقط)

I(1) عيّن،حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليديّة على 16 للعدد 3^n ، و للعدد 5^n.

2) احسب باقي قسمة $2^{2012}+3^{2013}+4^{2014}+5^{2015}+6^{2016}$ على 16.

3) عيّن الثنائيّات $(x\,,y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق $3^x+5^y\equiv 0[16]$.

II) نعتبر العدديْن الطبيعيّيْن $a=4n+3$ و $b=2n+3$ ، حيث n عدد طبيعي.

1) عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n، $PGCD\left(a,b\right)$.

2) عيّن قيمة n بحيث يكون : $\begin{cases} PGCD\left(a,b\right)=3 \\ PPCM\left(a,b\right)=135 \end{cases}$.

التمرين الرّابع (3,5نقط)

لتكن المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $u_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1. ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \prec 0$.

ب) أثبت أنّ المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة.

2. نرمز بـ $\left(v_n\right)$ إلى المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=\dfrac{-u_n+4}{n}$.

ا) برهن أنّ $\left(v_n\right)$ متتالية هندسيّة أساسها 3 ، يطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ) احسب، بدلالة n، المجموعيْن : $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$، ثمّ $\Sigma_n=\dfrac{v_1}{2}+\dfrac{v_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{v_n}{2^n}$.

3. نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\ln(v_n)$.

احسب، بدلالة n، المجموع : $T_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$.

التمرين الخامس (06 نقط)

I- الجدول الموالي هو جدول تغيّرات الدالة g المعرّفة $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ على بـ : $g(x)=x^2+2x+\ln|x+1|$.

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$	
$g(x)$	↘	↗

1. احسب النهايات غير المسجّلة في جدول التغيّرات.

2. احسب $g(-2)$ و $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على D_f .

II- لتكن f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f\left(x\right)=x-1-\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}$.

يرمز $\left(C_f\right)$ إلى منحنيها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$؛[وحدة الطول: $1cm$].

1. ا) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$.

ب) احسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ ، ثمّ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f\left(x\right)$ ، و فسّر النتيجتيْن الأخيرتيْن هندسيّا.

جـ) احسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x-1\right)\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيّا.

2. ا) بيّن أنّه، من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{g\left(x\right)}{(x+1)^2}$.

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلّيْن α و β حيث $-0{,}6\prec\alpha\prec-0{,}5$ و $1{,}3\prec\beta\prec1{,}4$.

د) x عدد حقيقي كيفي من D_f ؛ احسب $f\left(x\right)+f\left(-2-x\right)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيّا .

3. ا) أنشئ المنحني $\left(C_f\right)$.

ب) نعتبر ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2+2(\alpha+1)z+\left[(\alpha+1)(\beta+2)+\ln(\alpha+1)\right]=0$ ؛
حيث α و β وسيطان حقيقيّان و $\alpha\geq0$. حدّد مجموعة النقط $M\left(\alpha,\beta\right)$ من المستوي التي تجعل المعادلة المذكورة تقبل حلّيْن مترافقيْن.

الموضــوع الثاني

التمرين الأول :(4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3,4,0)$ ، $B(0,5,0)$ ، $C(0,0,5)$.

1. ا) علّم النقط A ، B ، C.

ب) تحقق من أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا.

جـ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1,3,3)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتيّة له.

2. ا) برهن أنّ المثلث AOB متساوي السّاقيْن.

ب) عيّن إحداثيّات النقطة I : منتصف القطعة $[AB]$ ، ثمّ بيّن أنّ $OI=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

جـ) استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3. ا) أثبت أنّ المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC) تساوي $\frac{15}{\sqrt{19}}$.

ب) بحساب حجم رباعي الوجوه بكيفيّة ثانية، استنتج مساحة المثلث ABC.

التمرين الثاني (3,5نقط)

1. حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعدلة : $(z+1-i\sqrt{3})(z^2-2z+4)=0$.

2. نعتبر، في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C ، التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1+i\sqrt{3}$.

ا) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، و استنتج أنّه يمكن اعتبار B صورة لِـ C بتحويل نقطي S يطلب تعيينه مع عناصره المميّزة.

ب) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$.

جـ) استنتج من ا) و بـ) طبيعة الرّباعي $ABDC$.

د) اكتب الأعداد المركّبة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي.

هـ) عيّن (Γ) : مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left((z-z_A)^2\right)=\arg(z_A.z_B.z_C)$.

التمرين الثالث (3نقط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)\cdots 9x'-14y'=13$ ،علما أنّ الثنائيّة $(3,1)$ حلّ خاصّ لها .

2) نعتبر، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(2)\cdots 45x-28y=130$.

ا) برهن أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة(2) فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.

ب) بيّن، عندئذ، أنّه يمكن استنتاج حلول المعادلة(2) من حلول المعادلة (1) ، و تحقق أنّ حلول المعادلة(2) هي :

$(x,y)=(28k+6,45k+5)\quad ;k\in\mathbb{Z}$

3) N عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 ، و يُكتب$\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7 .

عيّن α و β ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين الرّابع (4 نقط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + n - \frac{1}{2}$.

1. ا) احسب u_1 ، u_2، ثمّ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ \frac{-n}{2} + \frac{1}{4}$.

جـ) n عدد طبيعي كيفي ، احسب $u_{n+1} - u_n$ ، ثمّ أكّد تخمينك السّابق

2. نرمز بـ(v_n) إلى المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 4u_n + 2n$.

ا) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسيّة أساسها3، يطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالةn ، و استنتج عبارة u_n بدلالةn ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) احسب، بدلالةn، المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

د) استنتج حساب المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، بدلالة$n$.

التمرين الخامس (05,5 نقط)

نعتبر الدالة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^{x}$.

يرمز (C_f) إلى منحني الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،(وحدة الطول $2cm$).

1. ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (-x+1)\right]$، ثمّ فسر النتيجة هندسيّا.

جـ) ادرس الوضعيّة النسبيّة للمنحنى (C_f) و المستقيم المقارب المائل (Δ) .

2. ا) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1$.

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3. ا) أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم المقارب (Δ). يطلب إعطاء معادلة لهذا المماس.

ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين فاصلتها.

4. ا) ارسم المماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).(تُعطى: $f(0,5) \simeq 1,57$ ؛ $f(0,75) \simeq 2,61$ ؛ $f(1) \simeq 4,67$).

ب) ناقش بيانيّا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و إشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-2x} + e^{-x} = 1$.