ثانوية مراح عبد القادر　　　　　　　　　　　　　　**السنة:** 14/13

المستوى : 3 رياضي　　　　　　　　　　　　　　**المدة:** 4ساعات ونصف الساعة

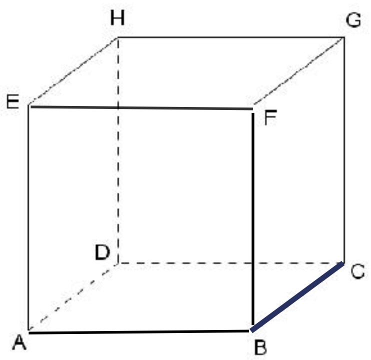
إختبار الدورة الثانية في مادة الرياضيات

على الطالب اختيار موضوع واحد

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ الذي طول حرفه 1 **الممثل كما في الشكل المقابل**



في كل مايلي الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$

نرمز بـ K **إلى مرجح الجملة المثقلة** $\{(F;2),(D;1)\}$.

الجزء الأول:

1) بين أن إحداثيات النقطة K هي $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

2) برهن أن (EK) **و** (DF) **متعامدان.**

3) **أحسب المسافة** EK .

الجزء الثاني:

لتكن M **نقطة من القطعة** $[HG]$.

نضع $m=HM$ **(إذن** m **عدد** حقيقي ينتمي إلى $[0;1]$ **).**

1) برهن أنه ، **من أجل كل عدد** m **من المجال** $[0;1]$ **، حجم رباعي الوجوه** $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$ **بوحدة الحجم.**

2) برهن أن **المعادلة** الديكارتية للمستوي (MFD) هي : $(-1+m)x+y-mz=0$.

3) **نرمز بـ** d_m **إلى بعد النقطة** E **عن المستوي** (MFD).

أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد m **من** $[0;1]$ ، لدينا : $d_m=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

ب -عين وضعية النقطة M **على القطعة** $[HG]$ التي من أجلها تكون **المسافة** d_m أعظمية.

جـ - إستنتج أنه لما تكون **المسافة** d_m أعظمية **، النقطة** K هي المسقط العمودي لـ E **على المستوي** (MFD) .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

في المستوي المركب المرفق بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ **، نعتبر النقطة** A **ذات اللاحقة** 2 **و الدائرة** (C) مركزها O **وتشمل النقطة** A. في كل التمرين نرمز بـ α **للعدد المركب :** $\alpha=1+i\sqrt{3}$ **و** $\bar{\alpha}$ **إلى** مرافقه .

1) أ – بين أن : $\alpha^2-4\alpha=2\bar{\alpha}-8$.

ب – بين أن النقطتين B **و** C ذات اللاحقتين على الترتيب α **و** $\bar{\alpha}$ **تنتمي للدائرة** (C).

2) **لتكن النقطة** D **من الدائرة** (C) لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi[$.

أ-**أنشئ النقطة** E **صورة النقطة** D **بالدوران** r **الذي مركزه** O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
في الشكل 1 المرفق في الصفحة 5 (ترد مع ورقة الإجابة)

ب -**تحقق أن لاحقة النقطة** E هي: $z_E=\alpha e^{i\theta}$.

3) ليكن F **و** G منتصفا القطعتين $[BD]$ **و** $[CE]$ على الترتيب.

أ- **تحقق أن لاحقة النقطة** F هي : $z_F=\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.

ب- قبل أن النقطة G لاحقتها هي $z_G = \frac{\sim e^{i^{-}} + \overline{\sim}}{2}$.

بين أن $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\sim}{2}$ ، إستنتج طبيعة المثلث AFG .

جـ-استنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول النقطة F إلى النقطة G يطلب تحديد عناصره المميزة.

التمرين الثاني: (5.5 نقاط)

الجزء الأول:

نبحث عن مجموعة الثنائيات (x,y) للأعداد الصحيحة النسبية حلول المعادلة : $(E):16x-3y=4$

1) تحقق أن الثنائية $(1;4)$ هي حل خاص للمعادلة (E) .

2) عين مجموعة حلول المعادلة (E).

الجزء الثاني:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M **ذات اللاحقة** z **النقطة** M' **ذات اللاحقة** z' حيث:

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\circledR}{8}}z \quad .$$

نعرف متتالية نقطية (M_n) بالطريقة التالية : **النقطة** M_0 **ذات اللاحقة** $z_0 = i$ **و من أجل كل عدد** طبيعي n ،

$M_{n+1} = f(M_n)$. **نضع** z_n **لاحقة النقطة** M_n .

النقط M_0, M_1, M_2 **و** M_3 **علمت في الشكل** 2 المرفق في الوثيقة **صفحة** 5**(ترد مع ورقة الإجابة).**

1) عين **الطبيعة** و **العناصر** المميزة للتحويل f .

2) ليكن g للتحويل النقطي **المعرف** بـ: $g = f \circ f \circ f \circ f$.

أ- عين طبيعة **التحويل** g **و عناصره** المميزة.

ب- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $OM_{n+4} = 4OM_n$ **و أن** $\left(\overrightarrow{OM}_n, \overrightarrow{0M}_{n+4}\right) = -\frac{\circledR}{2} + 2k\circledR$.

حيث k عدد صحيح نسبي.

جـ - **أتمم الشكل** 2 **بإنشاء النقط** M_4, M_5 **و** M_6 .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\circledR}{2}+\frac{3n\circledR}{8}\right)}$.

4) ليكن n **و** p عددين طبيعيين حيث $p \le n$.

أ- **عبر بدلالة** n **و** p عن قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{OM}_p, \overrightarrow{OM}_n\right)$.

ب- برهن أن النقط M_p, O, M_n **تكون** في إستقامية إذا و فقط إذا كان $n-p$ **مضاعف العدد** 8 .

5) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n **حتى تكون النقطة** M_n **تنتمي** إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

التمرين الرابع: (6.5 نقاط)

الجزء الأول:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x **موجب تماما** : $e^x \ge x+1$ **و** $\ln x \le x-1$.

2) **إستنتج** أنه من أجل كل عدد حقيقي x **موجب تماما** : $e^x - \ln x \ge 2$.

الجزء الثاني :دراسة دالة : **نعتبر الدالة** f **المعرفة على المجال** $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} \ldots\ldots\ldots \quad x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول : $4cm$

1) **لماذا الدالة** f **معرفة على** $[0;+\infty[$.

2) بين أن الدالة f مستمرة عند 0 . هل f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟

3) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة بيانيا.

4) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=e^{x}-\ln x-xe^{x}+1$.

أ- عين نهاية الدالة g عند 0 ثم عند $+\infty$.

بـ-أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

جـ - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في $]0;+\infty[$.برر أن $1,23\le \sim \le 1,24$.

د - أدرس إشارة $g(x)$ لما x يمسح المجال $]0;+\infty[$.

5) أ- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

بـ - برهن أن $f(\sim)=\dfrac{1}{e^{\sim}-\dfrac{1}{\sim}}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\sim)$.

6) أنشئ المنحنى (C) و حدد المماسين عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و ~ .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4نقاط)

1)نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2011x-1432y=31$ .... (1)

أ) أثبت أن العدد 2011 أولي .

بـ) باستعمال خوارزمية إقليدس ،عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ثم حل المعادلة (1) .

2.أ)عين حسب قيم العدد الطبيعي n ،باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{n} على 7 .

ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

بـ)عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2010^{n}+2011^{n}+1432^{n}\equiv 0[7]$.

3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{2¥\sim}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9حيث ~، و ¥ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\ ;¥)$ حل للمعادلة (1) .

- عين ~، و ¥ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين الثاني:(4نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستويين (P) و (P') معادلة كل منهما على الترتيب:

$x+y+z=0$ و $2x+3y+z-4=0$.

1.بين أن (P) و (P') متقاطعان في المستقيم (D) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=-4-2t\\ y=4+t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$.

2.ليكن ª عدد حقيقي .

نعتبر $(P_{ª})$ حزمة من المستويات المعرفة بـ: $(1-ª)(x+y+z)+ª(2x+3y+z-4)=0$

أ)تحقق أن $\vec{n}(1+ª;1+2ª;1)$ هو شعاع ناظمي للمستويات $(P_{ª})$.

بـ) عين قيمة ª حتى يكون (P) و $(P_{ª})$ متطابقان.

جـ)هل توجد قيمة لـ ª حتى يكون (P) و $(P_{ª})$ متعامدان .

3. بين أن كل المستويات $(P_{ª})$ تتقاطع في مستقيم وحيد يطلب تعيينه.

4.أ)بين أن المستويان (P) و (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D') يطلب تعيين تمثيله الوسيطي .

بـ) بين أن (D) و (D') متطابقان.

5) $A(1;1;1)$ نقطة من الفضاء .أحسب المسافة بين A و المستقيم (D) .

التمرين الثالث:(5نقط)

المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1.أ)نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $a=2$ ، $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$

عين قيس للزاوية $\widehat{ABC}$.

ب) استنتج أن اللاحقة w للنقطة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

2.نعتبر (z_n) متتالية أعداد مركبة ، التي حدها الأول $z_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \quad .$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بـ A_n الى النقطة ذات اللاحقة z_n .

أ) بين أن لواحق النقط A_2 ، A_3 و A_4 هي على الترتيب $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

ب) قارن بين أطوال القطع $[A_1A_2]$ ، $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.(لاحظ أن $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$) .

جـ)بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1}-w=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-w)$

حيث w هو العدد المركب المعرف في السؤال (1.ب)

د) استنتج أن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة A_n بتحويل نقطي f ، يطلب تعيين عناصره المميزة.

هـ)برر أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $A_{n+6}=A_n$.

-عين لاحقة النقطة A_{2012} .

3.عين من أجل كل العدد الطبيعي n طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$.

التمرين الرابع:(7نقط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=e^x-x-1$.

أ) أدرس تغيرا ت الدالة g .ثم استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $e^x-x\succ 0$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $[0,1]$:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$$

(¥) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $(6cm)$

نفرض أن الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$.

1.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$ لدينا: $f(x)\in[0,1]$.

2.ليكن (d) المستقيم الذي معادلته $y=x$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد x من $[0,1]$:

$$f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{e^x-x} \quad .$$

ب) أدرس وضعية (¥) بالنسبة إلى (d) على المجال $[0,1]$.

3.أنشئ (¥) و (d) .

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) مع ترك أثر الرسم.

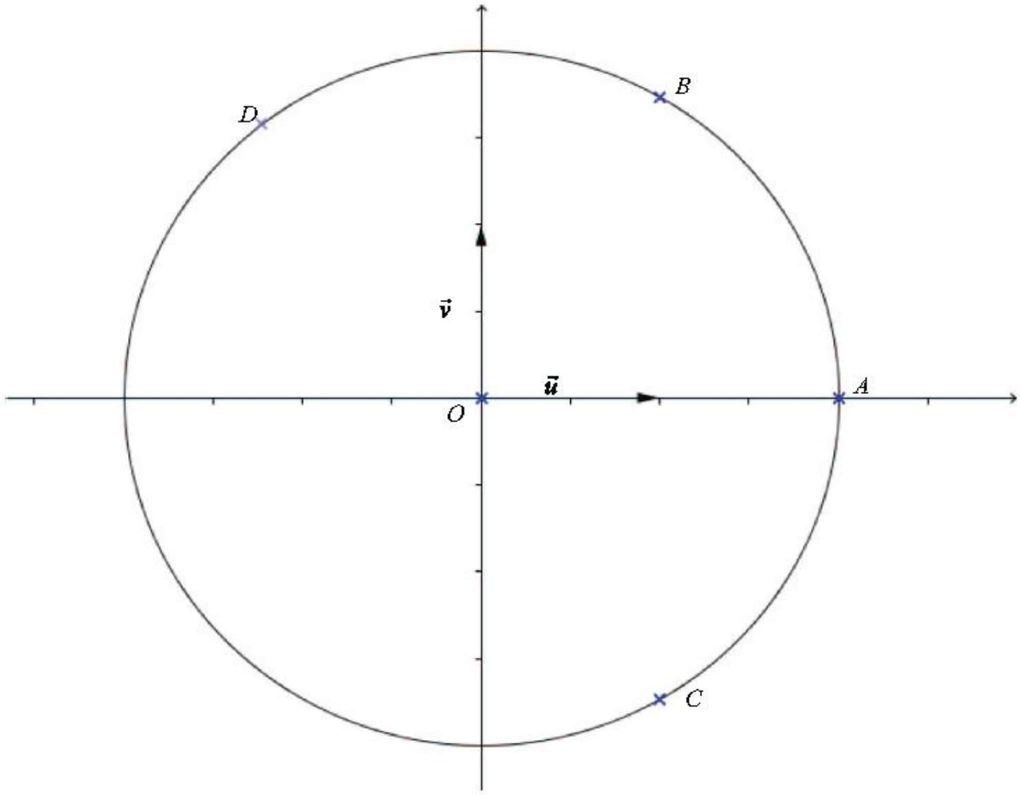
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2}\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.

جـ) استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .يطلب تعيين نهايتها.

الإسم : اللقب : القسم:

الوثيقة خاصة بالموضوع الأول ترد مع ورقة **الإجابة**

الشكل رقم 1



الشكل رقم 2