ثانوية صلاح الدين الأ يوبي- بوقادير السنة الدراسية : 2014/2013

المستوى : 3 علوم تجريبية التاريخ: 2013/11/24

الفرض المحروس الثاني للفترة الأولى

التمرين الأ ول :

نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$$

1) تحقق من أن $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

3) استنتج مجموعة حلول المعادلة : $-2(\ln x)^3+3(\ln x)^2+11\ln x-6=0$

4) استنتج مجموعة حلول المعادلة : $-2e^{3x}+3e^{2x}+11e^x-6=0$

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$ و $f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$

ب-ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ج-بين أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ و $y=x-1$ مقاربان لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

د- حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل من Δ_1 و Δ_2.

2.أ- بين أن الدالة f فردية.

ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

3.ارسم Δ_1 ، Δ_2 ، المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 ، ثم المنحني (C).

حل التمرين الأول :

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ و $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

لدينا :

$$x-1+\frac{2}{e^x+1}=x+\frac{-(e^x+1)+2}{e^x+1}=x+\frac{-e^x+1}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

و بالمثل:

$$x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+\frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1}=x+\frac{1-e^x}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

ب-دراسة نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$$

ج-بيان أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ و $y=x-1$ مقاربان لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)=0$

و منه نستنتج أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x+1}\right)=0$$

و منه نستنتج أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

د- تحديد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل من (Δ_1) و (Δ_2).

نحسب الفرق $f(x)-y$ و ندرس إشارته

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)-y=\left(f(x)-(x+1)\right)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\prec 0$

ومنه (C) يقع تحت (Δ_1) عند $-\infty$

و $f(x)-y=\left(f(x)-(x-1)\right)=\dfrac{2}{e^x+1}\succ 0$

ومنه (C) يقع فوق (Δ_2) عند $+\infty$

2.أ- بيان أن الدالة f فردية.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=-x-\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

و منه الدالة f فردية

ب- دراسة تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=1-\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x+1\right)^2-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}\succ 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

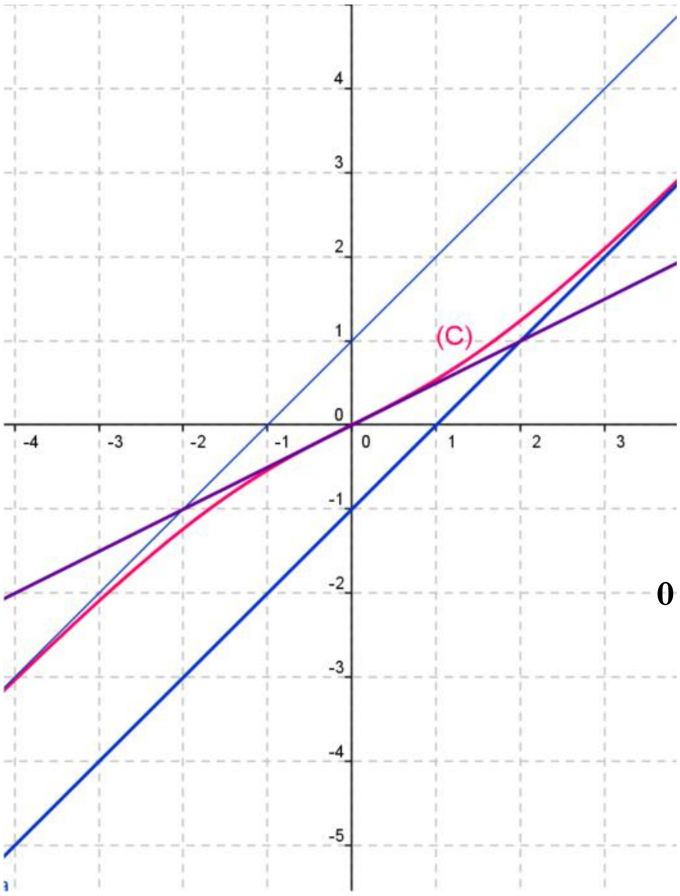
جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

ج- كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها **0**

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{2}x$$

3.رسم (Δ_1) ، (Δ_2) ، (T) ، ثم المنحني (C).



1) التحقق من أن $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

ننطلق من الطرف الثاني و بالنشر نجد:

$$(2x-1)(x+2)(3-x)=\left(2x^2+4x-x-2\right)(3-x)$$
$$=\left(2x^2+3x-2\right)(3-x)$$
$$=6x^2+9x-6-2x^3-3x^2+2x$$
$$=-2x^3+3x^2+11x-6=P(x)$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

$P(x)=0$ معناه $(2x-1)(x+2)(3-x)=0$

أي : $2x-1=0$ أو $x+2=0$ أو $3-x=0$

ومنه : $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-2$ أو $x=3$

3) استنتاج مجموعة حلول المعادلة : $-2(\ln x)^3+3(\ln x)^2+11\ln x-6=0$

من أجل $x\succ 0$ و بوضع $\ln x=X$ يؤول حل هذه المعادلة الى حل الجملة : $\begin{cases}\ln x=X\\ -2X^3+3X^2+11X-6=0 \quad (1)\end{cases}$

نعلم أن حلول المعادلة (1) هي: $X=\frac{1}{2}$ أو $X=-2$ أو $X=3$ ومنه :

$X=\frac{1}{2}$ معناه $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

معناه $X=-2$ $\ln x=-2$ أي : $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

معناه $X=3$ $\ln x=3$ أي : $x=e^3$

$S=\left\{\sqrt{e},\frac{1}{e^2},e^3\right\}$

4) استنتاج مجموعة حلول المعادلة : $-2e^{3x}+3e^{2x}+11e^x-6=0$

بوضع $e^x=X$ **يؤول حل هذه المعادلة الى حل الجملة :** $\begin{cases}\ln x=X\\ -2X^3+3X^2+11X-6=0 \quad (2)\end{cases}$

نعلم أن حلول المعادلة (1) **هي:** $X=\frac{1}{2}$ **أو** $X=-2$ **أو** $X=3$ **ومنه :**

$X=\frac{1}{2}$ **معناه** $e^x=\frac{1}{2}$ **أي** $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

$X=-2$ **معناه** $e^x=-2$ **وهي مستحيلة الحل**

معناه $X=3$ $e^x=3$ **أي :** $x=\ln 3$

$S=\{-\ln 2;\ln 3\}$