الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية احمد فرانسيس (جيجل)

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة ماي 2014)

الشعبة : رياضيات — المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

I) ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث : $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .

3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=-1$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) التحويل النقطي S ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=(1+i)z+i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقتها العدد المركب z_n .

نضع : $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1}=S(M_n)$.

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n=(1+i)^n-1$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع : $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\frac{n}{2^n}$.

3) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x - x\ln 2$.
عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $64x - 48y = 160$.
عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) .

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{3\alpha 3\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 8 ، ويكتب $\overline{5\beta 05}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 .
عيّن α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري .

3) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 13 .
ب- عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2014^{1436} + 1435^n \equiv 0\ [13]$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ،
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .
ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.
استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.
ب- ادرس وضع المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\dfrac{3}{4}\right)$ و $B\left(-2;\dfrac{5}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}\right)$.
- بيّن أن : $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .
ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمسّ المنحني (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.
أ- بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.
ب- احسب ، بوحدة المساحة ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=-3$ و $x=-2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(z)$ حيث :

$$P(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

أ- عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث ، من أجل كل عدد مركب z ، لدينا :

$$P(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(az^2 + bz + c\right)$$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط :

A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A = 3i$ ، $z_B = -3i$ ، $z_C = 5 - 2i$ و $z_D = 5 + 2i$.

أ- عيّن لاحقة النقطة G مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

ب- عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 10$

جـ- عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 = 59$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ، نعتبر :

- النقطتين $A(-3; 0; 1)$ و $B(1; -1; 0)$
- المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\left(t \in \mathbb{R}\right)$ $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases}$
- المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; $\begin{cases} x = 2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + \beta \end{cases}$

1) بيّن أن : $x + y + 3z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة B وعمودي على المستقيم (D) .

3) بيّن أن تقاطع (P) و (P') هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي : $\left(t' \in \mathbb{R}\right)$ $\begin{cases} x = -t' + 1 \\ y = -2t' - 1 \\ z = t' \end{cases}$

4) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) .

5) (S) سطح كرة مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .

بيّن أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة ، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{3^{n+1}}{4^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

2) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$.

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 4$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(4-u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 4-u_n\le 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $1\,cm$) .

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها .

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة E .

3) أ- ارسم المستقيم (T) والمنحني (C) .

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $me^{x}+x+1=0$.

4) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب- احسب ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$.

5) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(1-|x|)e^{|x|}$.

أ- بيّن كيفية رسم المنحني (C') الممثل للدالة g انطلاقا من المنحني (C) .

ب- ارسم المنحني (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II) نرفق بكل عدد حقيقي غير معدوم α ، الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x)=(\alpha x+1)e^{-x}$.

نسمي (C_α) المنحني الممثل للدالة f_α في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب f' و f'' ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $f_\alpha^{(n)}(x)=(-1)^n(\alpha x+1-n\alpha)e^{-x}$ حيث : f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

2) ادرس ، حسب قيم α ، تغيّرات الدالة f_α .

3) نسمّي G_α النقطة التي يكون عندها مماس المنحني (C_α) يوازي محور الفواصل .

أ- احسب ، بدلالة α ، إحداثيي النقطة G_α .

ب- عيّن مجموعة النقط G_α عندما يمسح العدد α مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.