على التـــلميذ أن يعـــالج أحد الموضـــوعين على الخيــــار

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ وليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. بين أن المستقيمين (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي (P) الذي يوازي (D) و يشمل (AB)
   - أ. بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
   - ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P)
   - ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من (D) و (P) ثابتة ، حدد هذا الثابت
   - د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) المعرف بتقاطع (P) والمستوي (Oxy)
   - ه. عين مجوعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   - و. لتكن (S) سطح كرة التي تمس (P) في النقطة $C(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن (P) بمسافة $d=6$ و يقع من جهة O ، عين معادلة ديكارتية لــ (S)
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي (OAB) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

   ب/ بين أن المستوي (OAB) و سطح الكرة (S) يتقاطعان و فق دائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$

   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013}=0$ و أكتب العدد $2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ و لتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5+2^{2015}y_{2015}$
   - أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = 2^{2015}\, y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$ حيث: Z_n لاحقة A_n

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)$ المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. بين أن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $\left(E\right) .... 5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $\left(x;y\right)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$ فإن : x مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة $\left(E\right)$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\left(E\right)$

ج/ استنتج حلول الجملة $\left(S\right)$: $\begin{cases} x \equiv -1\left[6\right] \\ x \equiv -4\left[5\right] \end{cases}$

د/ حل الجملة $\left(S\right)$ بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $\left(x;y\right)$ حلول المعادلة $\left(E\right)$ التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين α و β حتى تكون الثنائية $\left(a;b\right)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$

التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـــ : $f\left(x\right) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$ و $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(x\right) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ وبين أن المستقيم $\left(D\right)$ الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C\right)$

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $\left(C\right)$ و المستقيم $\left(D\right)$

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(x\right) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$ و بين أن المستقيم $\left(D'\right)$ الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C\right)$

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $\left(C\right)$ و المستقيم $\left(D'\right)$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم $\left(D\right)$، $\left(D'\right)$ و $\left(C\right)$

5. ليكن $\left(\Delta_m\right)$ المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}\left(1 - m\right)$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ و المنحنى $\left(C\right)$

II. نضع : $I=\int_{2}^{3}\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد I
2. بين أنه من كل x من $[0;+\infty[$ ، $\ln(1+X)\leq X$
3. استنتج أن: $0\leq I\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$ و أعط حصرا للعدد I سعته $0,02$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

1. أ/ تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)$
ب/ استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان
2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D
ب/ حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل
ج/ بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما
3. لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$
حيث z_n لاحقة النقطة M_n و نضع : $U_n=\left|z_n-z_\Omega\right|$ من أجل كل عدد طبيعي n
أ/ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
ب/ عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة
ج/ نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقية $[A\Omega],[M_1\Omega]...............,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$
- أحسب المجموع T_n بدلالة n
4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$
- حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$

التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$..........(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. بين أن العددين x و y أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1)
4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17
5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$
2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي (P) ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $AM = CM$ هي المستوي (P') الذي معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$

ج/ بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2);(C;-2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي

- عين بدلالة α إحداثيات G_α و استنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$

التمرين الرابع :(7 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1, x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

I. 1. أحسب نهاية f عند $+\infty$

1. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$ ، ثم تحقق أن : $4,6<\alpha<4,7$
4. أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

II. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

1. أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$
2. حدد اتجاه تغيرات الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)
3. أنشىء (D) و (C_f)

III. 1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$

- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

انتهـــــــــــــــــــــى

مع تمانيــاتنا بالنجاح في شهــادة البكـــــالوريا

أساتـــذة المـــادة