الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية محمد الصديق بن يحي - بلّاعة - سطيف -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: ماي 2015

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

1) P كثير حدود ذا المتغيّر z حيث $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

أ) أثبت أنّ 4 جذر لكثير الحدود P ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

ب) أكتب حلول المعادلة $P(z) = 0$ على الشكل الأسي.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركّب لواحقها على الترتيب $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

أ) أنشىء بدقة النقط A ، B ، C .

ب) أثبت أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ج) n عدد طبيعي. B_n نقطة من المستوي المركّب لاحقتها $(z_B)^n$.

أوجد الأعداد الطبيعية n حتى تنتمي النقطة B_n إلى المستقيم (OC) .

3) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 24$.

أ) أوجد z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب) عيّن ثمّ أنشىء (Γ) .

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. نعتبر النقط $A(-1;2;3)$ ، $B(-3;3;-4)$ ، $C(-5;1;1)$ والمستقيم (D) المعرّف بالجملة: $\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& 9+4t \\ y &=& 6+t \\ z &=& 2+2t \end{array} \right. ;t \in \mathbb{R}$.

1) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AC) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (AC) .

2) أ) أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (P) العمودي على المستقيم (D) والمار من A .

ب) تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) .

ج) أحسب d_B المسافة بين النقطة B والمستوي (P) .

د) d_A المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) . عبّر عن d_A بدلالة d_B و AB ، ثمّ استنتج عندئذ d_A .

3) $H(1;4;-2)$ نقطة من الفضاء.

أ) بيّن أنّ H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

ب) أحسب مرة ثانية d_A .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) (V_n) المتتالية الهندسية الموجبة تماما والمعرّفة على $\mathbb{N}$ حيث: $V_1 - V_3 = \dfrac{7}{16}$ و $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = \dfrac{27}{64}$.

أ) أحسب V_2 والأساس q للمتتالية (V_n) .

ب) أكتب V_n بدلالة n .

2) (U_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $U_0 = -\dfrac{2}{3}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3}{4}U_n - \dfrac{1}{2}$.

أ) أحسب الحدود U_1 ، U_2 ، U_3 .

ب) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n فإنّ $U_n > -2$.

ج) عيّن اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) (W_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $W_n = U_n - V_n$.

أ) أثبت بالتراجع أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $W_n = -2$.

ب) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثمّ أحسب نهايتها.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \dfrac{U_1}{V_1} + \dfrac{U_2}{V_2} + \cdots \dfrac{U_n}{V_n}$.

التمرين الرابع: (06.5 نقطة)

I) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (3-2x)e^x + 2$.

1) أدرس تغيّرات الدّالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in]1,68;1,69[$.

3) استنتج، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II) f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. (وحدة الطول $2cm$) .

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

ج) أثبت أنّ $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2) أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{2 \times g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - 4x + 1)$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 4x - 1$.

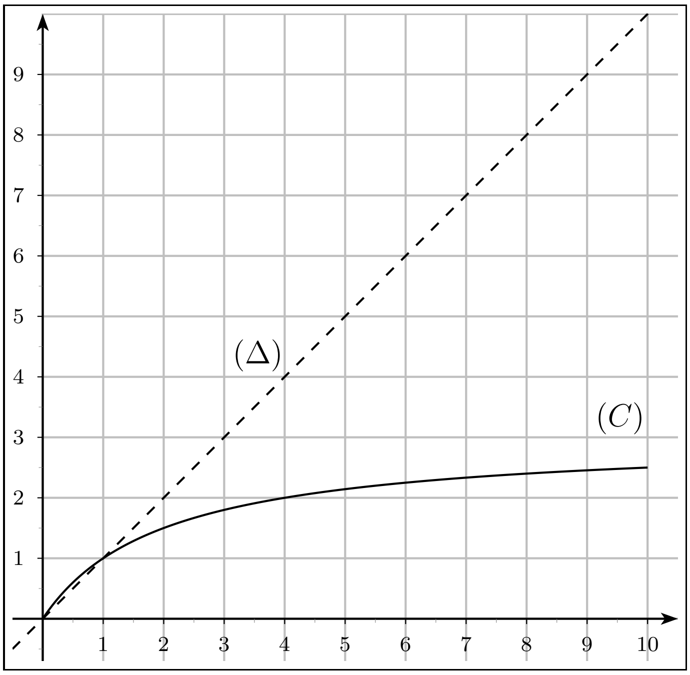
4) أرسم (Δ) ثمّ (C_f) .

5) m وسيط حقيقي. ناقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة $me^x - 4x + m + 2 = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 **نقاط**)

في الشكل المقابل، (C) التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على $[0;10]$ بـ $f(x) = 3 - \dfrac{6}{x+2}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. (U_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأوّل $U_0 = 8$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$



1) أ) أعد رسم هذا الشكل على ورقة الإجابة، ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 دون حسابها، مع إظهار خطوط التمثيل.

ب) ماهو تخمينك حول اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq 8$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) .

ج) استنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة ثمّ أحسب نهايتها.

3) أ) (V_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $V_n = 1 - \dfrac{1}{U_n}$.

أ) بيّن أنّ (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب) أحسب مرّة أخرى $\lim U_n$.

التمرين الثاني: (05 **نقاط**)

المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C ، D نقط من المستوي المركّب لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_C = -3+i$ ، $z_D = 1+5i$.

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحوّل A إلى C . عيّن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

2) أ) E مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عيّن z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب.

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $||\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = \dfrac{1}{2}||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$

3) أ) أكتب العدد المركّب $\dfrac{z_I - z_A}{z_E - z_D}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي يحوّل E إلى I ويحوّل D إلى A .

ج) ما طبيعة التحويل $S \circ S$.

4) K نقطة من المستوي تحقق $(z_K - z_D) = -2e^{i\frac{\pi}{6}}(z_I - z_A)$.

أثبت أنّ K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له.

التمرين الثالث: (04.5 **نقطة**)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x + 2y - z + 7 = 0$ والنقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{n}(0;1;2)$ ناظم للمستوي (ABC) .

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) أ) تحقق من أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدين.

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

3) k عدد حقيقي. (Q_k) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=k$.

أ) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي k حتى يكون (Q_k) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

ج) أدرس تقاطع المستويات (P) ، (ABC) ، (Q_{-3}) .

التمرين الرابع: (06.5 **نقطة**)

I. f_0 الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f_0(x) &=& -x\ln x \quad ;x>0 \\ f_0(0) &=& 0 \end{cases}$

(C_0) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ ، الوحدة $(3cm)$.

1) أ) أثبت أنّ الدّالة f_0 مستمرّة على المجال $[0;+\infty[$.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f_0(x)}{x}$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f_0 ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أكتب معادلة المماس (D_0) للمنحنى (C_0) في النقطة B_0 التي فاصلتها 1 .

4) أنشىء (D_0) و (C_0) على المجال $[0;3]$.

II. n عدد طبيعي. f_n الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f_n(x) &=& -nx-x\ln x \quad ;x>0 \\ f_n(0) &=& 0 \end{cases}$

(C_n) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أدرس اتجاه تغيّر الدّالة f_n على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ (C_n) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة B_n فاصلتها e^{-n} .

ب) بيّن أنّ معامل توجيه المماس عند النقطة B_n مستقل عن n .

III. F دّالة معرّفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $F(x)=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}\ln x$ ، و F' دّالتها المشتقة.

1) أحسب $F'(x)$ ، ثمّ استنتج دّالة أصلية للدّالة f_n .

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نعتبر I_n مساحة الحيّز المستوي المحدود بالمنحنى (C_n) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=e^{-n}$ ، $x=e^{-n-1}$ ، $y=0$.

أ) أثبت أنّ $I_0=\left(\dfrac{9}{4}-\dfrac{27}{4e^2}\right)cm^2$.

ب) عبّر عن I_n بدلالة n .