الموضوع الأول

التمرين الأول :

1.تمثيل الوسيطي لـ (AB) :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة $A(8;0;8)$ إذن : $(AB):\begin{cases}x=2\lambda+8\\y=3\lambda\\z=2\lambda+8\end{cases};\lambda\in IR$

2.تبيان أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ (AB) و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه لـ (D) و منه : $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه (AB) و (D) غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases}-5+3t=2\lambda+8...(1)\\1+2t=3\lambda....(2)\\-2t=2\lambda+8....(3)\end{cases}$ بعد التبسيط بين المعادلتين (2) و (3) نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا تحقق المعادلة (1) إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي

3. (P) المستوي الذي يوازي (D) و يشمل (AB)

أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) :

يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و على $\overrightarrow{u_{(D)}}$

لدينا : $\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0\end{array}$

ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ(P) :

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج :

ومنه : $\begin{array}{l}2(8)+0(-2)+1(8)+d=0\\d=-24\end{array}$

$(P):2x-2y+z-24=0$

ج. تبيان أن المسافة $d((P);(D))$ ثابتة مع تحديد الثابت :

لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$

ومنه :

$$d((P);(D))=d((P);M)=\frac{|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

ومنه : $d((P);(D))=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$

د. التمثيل الوسيطي لـ(Δ) المعرف بتقاطع (P) و (Oxy) :

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-2y+z-24=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$ وبوضع : $y=k$ ينتج :

$\begin{cases}x=y+12\\y=k\\z=0\end{cases}$ أي : $(\Delta):\begin{cases}x=k+12\\y=k\\z=0\end{cases};k\in IR$

هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء $\begin{cases}2x-2y+z-24=0\\z=0\end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم (Δ)

و. تعيين معادلة ديكارتية لـ(S) :

نصف قطر لـ(S) هو $C\omega=6$

لنعين إحداثيات ω : لنفرض $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ حيث (Δ') المستقيم العمودي على (P) في C ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases}x=2k'+10\\y=1-2k'\\z=6+k'\end{cases};k'\in IR$ ومنه : $d((P);\omega)=6$ بعد التبسيط نجد : $d((P);\omega)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(14;-3;8)$ أو $\omega(6;5;4)$

بتعويض إحداثيات كل من ω و النقطة O في معادلة (P)

نجد : $\begin{array}{l}O(0;0;0):-24<0\\ \omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0\\ \omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0\end{array}$ اذن

$\omega(6;5;4)$ و النقطة O في نفس جهة من المستوي (P) **إذن معادلة لـ(S)** هي : $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$

4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو(OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ(OAB) و يشمل النقطة O إذن :

$(OAB):\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases};(t';\lambda')\in IR^2$

استنتاج المعادلة الديكارتية لـ(OAB) :

$\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\\lambda'=\frac{y}{3}\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

: $(OAB):x-z=0$

ب. تبيان أن (S) و (OAB) متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :

لدينا : $d\left((OAB);\omega\right)=\dfrac{|6-4|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2}<6$ إذن :

$(OAB)\cap(S)$ هو دائرة

المستقيم الذي يشمل ω ويعامد (OAB) هو :

$$\begin{cases} x=6+h \\ y=15 \quad ; h\in IR \\ z=4-h \end{cases}$$

ومنه مركز الدائرة هو Ω نقطة تقاطع هذا المستقيم مع (OAB) وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و $\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها r حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2\left((OAB);\omega\right)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$$

التمرين الثاني :

1.تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$\begin{cases}(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}\\(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}\end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases}a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3}\\b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3}\end{cases}$$ بالمطابقة

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و $z_2=2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و $z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$$

3.**تبيان أن** $y_k=\dfrac{i}{2^{k-1}}\sin\dfrac{k\pi}{3}$:

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

4.**أ.تحقق أن** : $z_C=\dfrac{3}{2}z_A+z_B$:

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\dfrac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$:

لدينا :

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافىء $z_B-z_C=i\sqrt{3}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه : $|z_B-z_C|=\sqrt{3}|z_A-z_C|$ و $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

يكافىء : $\begin{cases}CB=\sqrt{3}CA\\ \left(\overline{CB};\overline{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C(1-\alpha)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

5.**أ.تبيان أن** (U_n) **متتالية هندسية مع تحديد أساسها** q **و حدها الأول** U_0 :

لدينا :

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta\right|$$

$$=\left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|i\sqrt{3}\right||z_{n+1}-z_n|=\sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول

$$U_0=|z_1-z_0|=\left|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0\right|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n **بدلالة** n :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n **بدلالة** n :

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا : $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف1

$\sqrt{128-32\sqrt{3}} = \left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times....\times U_n\times U_{n+1} = \left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}^{n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

التمرين الثالث :

1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ ومنه : $5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و 3 و 5 أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$

ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافىء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$

ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times 2+1$ ومنه $1=5-2(2)$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي :

$5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيمابينها و $6/5(x-3)$ أي $6/(x-3)$ ومنه $x=6k+3$

بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$

ج.استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافىء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي : $5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد : $(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α و β في x نجد : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

د. حل الجملة (S) بطرق غير استنتاجية :

(S) تكافىء $\begin{cases}5x\equiv -5[30]\\6x\equiv -24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv -19[30]$ أي : $x\equiv -19[30]$ ومنه $x\equiv 11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث :

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) و $x^2-y^2\le 56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le 56$ تكافىء $11k^2+16k-51\le 0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le 0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

4.تعين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$ فإن : $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و

$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times 5^3=126\alpha+25\beta$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافىء $5a-6b=3$ ومنه :

$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد $51\alpha+25\beta=202$ و بما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$

التمرين الرابع : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

1.أ.إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$ لإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

تبيان أن (D) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن (D) م م لـ (C) عند $+\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ(C) بالنسبة (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-x>0$ اذن (C) يقع فوق (D) من اجل كل x من IR

2.أ. إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^x+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^x}\right)$

$=\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln e^x=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$ لأن:

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0;\ \lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

تبيان أن (D') ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+\ln 2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2=0$

إذن (D') م م لـ (C) عند $-\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ(C) بالنسبة (D'):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن (C) يقع فوق (D') من اجل كل x من IR

3.دراسة إتجاه تغير f : f ق إ على IR حيث :

$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)}$

إشارة $f'(x)$: تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)>0$

$e^{2x}-2\ge 0$ معناه : $e^{2x}\ge 2$ معناه $2x\ge\ln 2$ أي $x\ge\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

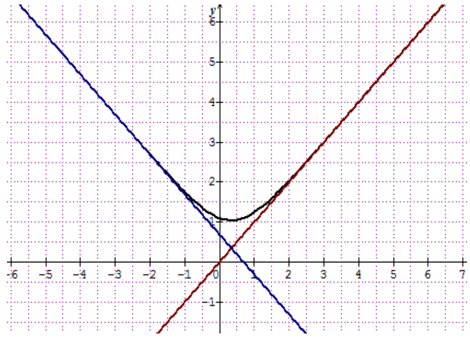
الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

4.الرسم :



5.أ.تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة

من أجل كل عدد حقيقي m لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافىء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافىء : $\begin{cases} y-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ x-\frac{\ln 2}{2}=0 \end{cases}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};y=\frac{\ln 2}{2}$

ب. المناقشة البيانية:

إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) هو (D)

إذا كان $m=-1$ فإن (Δ_m) هو (D')

(D) و (D') يتقاطعان في نقطة الثابتة A

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن (Δ_m) لايقطع المنحنى (C)

إذا كان $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن (Δ_m) يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة

II.1.تفسير الهندسي للعدد I : I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

2.تبيان من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\ln(1+X)\le X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة h

لدينا h ق.إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدالة h سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه

$\ln(1+X)-X\le 0$ أي $\ln(1+X)\le X$

3.استنتاج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا : $I=\int_2^3\left(f(x)-x\right)dx=\int_2^3\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx$ و بما أن :

$2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR $([2;3])$

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \le 2e^{-2x}$ ومنه :

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ أي $I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \ge 0$ و بما أن $2 < 3$ فإن

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \ge 0$ أي $I \ge 0$ ومنه : $0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$