الموضوع الثاني

التمرين الاول :

1ـ أ/ تحقق أن : $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

لدينا:
$$z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a}i + \frac{1}{a}i$$
$$= 1 + \frac{a-1+1}{a}i = 1+i$$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}(z_A - z_C) = \frac{1}{a}i(a - ai) = i + 1$

ومنه : $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

ب/ استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان :

من السؤال ـأـ لدينا : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a}i$ و منه :

$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لان $\frac{1}{a} > 0$ وبالتالي :

$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : (AC) و (BD) متعامدان

2ـ أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$

لدينا $S(A) = B$ معناه : $z_B = \alpha z_A + \beta ....(1)$

$S(C) = D$ معناه : $z_D = \alpha z_C + \beta ....(2)$ ومنه بطرح (1) من (2) نجد : $z_B - z_D = \alpha(z_A - z_C)$ ومنه : $\alpha = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D}$

ومنه : $\alpha = \frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D = \alpha z_C + \beta$ ومنه : $\beta = z_D - \alpha z_C$ اي :

$\beta = -\frac{1}{a}i - \frac{1}{a}i(ai)$ ومنه : $\beta = 1 - \frac{1}{a}i$

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{a}iz + 1 - \frac{1}{a}i$

ب/ تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S :

نعلم أن : $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega = \frac{1 - \frac{1}{a}i}{1 - \frac{1}{a}i} = 1$ ومنه $z_\Omega = 1$

- **تحديد العناصرة المميزة للتشابه S :**

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a} > 0$)

ج/ تبيان أن المثلثين OAC و BHD متشابهان :

لدينا $S(A) = B$ و $S(C) = D$

لنحدد لاحقة النقطة O بالتشابه S

$z' = \frac{1}{a}i(0) + 1 - \frac{1}{a}i = 1 - \frac{1}{a}i = z_H$ لأن $z_H = 1 + z_D = 1 - \frac{1}{a}i$

وهكذا $S(O) = H$

إذن صورة المثلث OAC بالتشابه S هو المثلث BHD ومنه المثلثان OAC و BHD متشابهان

- **ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :**

$A(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD) = \frac{A(OAC)}{a^2}$

3ـ أ/ تبيان أن (U_n) متتالية هندسية :

لدينا : $U_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1} = S(M_n)$ فإن : $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n = \frac{1}{a}|z_n - z_\Omega| = \frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{a}U_n$ ومنه (U_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0 = |z_A - z_\Omega| = |z_0 - z_\Omega| = |a-1|$ أي : $U_0 = |a-1|$

ب/ تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة :

(U_n) متقاربة يعني : $-1 < q \leq 1$ أي : $-1 < \frac{1}{a} \leq 1$ و بما أن

$\frac{1}{a} > 0$ ينتج : $0 < \frac{1}{a} \leq 1$ أي $a \geq 1$ و بما أن $a \neq 1$ فإن : $a > 1$

أي : $a \in]1; +\infty[$

ج/ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega + ... + M_0\Omega$ (نلاحظ أن :

$U_n = |z_n - z_\Omega| = U_n$) ومنه : $T_n = U_{n+1} + U_n .... + U_0$ ومنه

$T_n = U_0\left(\frac{1 - q^{n+2}}{1-q}\right)$ ومنه : $T_n = |a-1|\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)}\right)$ ومنه :

$$T_n = a \times \frac{|a-1|}{a-1}\left(1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$$

4ـ لدينا $Z = a(1 + e^{i\theta})$ و $\theta \in IR$:

- **تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ) :**

$Z = a(1 + e^{i\theta})$ يكافىء :

$Z = a + ae^{i\theta}$ يكافىء $Z - a = ae^{i\theta}$ و بما أن $\theta \in IR$

يكون لدينا $|Z - a| = |a| = a$ لان $a > 0$ أي (Γ) هي دائرة

مركزها A ذات اللاحقة a و نصف قطرها $r = a$

التمرين الثاني :

I. تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة

$2014\alpha = 475\beta + m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha = 475\beta + m$ تكافىء $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

II. لدينا المعادلة $2014x-475y=-19$....(1) :

1.تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء $106x-25y=-1$...(*) ولدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة (*) نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$

2.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) :

المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجوعة الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1$...(*)

بما أن الثنائية (4;17) حل للمعادلة (*) فإن :

$(E)...106(4)-25(17)=-1$

من (*) و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3.تبيان أن x و y أوليان فيمابينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y أي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ إذن : $d/106x-25y$ أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$

إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه x و y أوليان فيمابينهما

4. تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17 :

أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv4[25]\\n\equiv17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ ومنه

$106\beta+17=25\alpha+4$: ومنه $106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية (4;17) حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال-2-

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن

$n=106\beta+17$ بالتعويض نجد

$n=106(25p+52)+17$ ومنه :

$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$

5.تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

و لدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv0[10]$ أي : $131k+21\equiv0[10]$ أي : $k+1\equiv0[10]$ أي $k\equiv-1[10]$ أي $k\equiv9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :

$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث :

1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $B\hat{A}C$:

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

ومنه $COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$

$B\hat{A}C=77^0$

2.استنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

بما أن : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=77^0$ فإن A ، B و C ليست في استقامية

استنتاج أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$

لدينا : $B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$

$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

3.أ. كتابة معادلة الديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري لـ $[AB]$:

(P) المستوي المحوري لـ $[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$

ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي المستوي (P') معادلته $4y+2z-7=0$:

$AM=CM$ معناه :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$

و بعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)

ج. تبيان أن (P) و (P') متقاطعان : لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ ومنه $\dfrac{0}{6}\neq\dfrac{4}{4}\neq\dfrac{2}{-4}$ إذن (P) و (P')

متقاطعان وفق مستقيم

تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P')

لدينا : $\begin{cases} 6x+4y-4z-1=0 \\ 4y+2z-7=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 6x-2z+7-4z-1=0 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 6x-6z=-6 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \end{cases}$ ومنه : إذن : $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \\ z=z \end{cases}$

$$(\Delta):\begin{cases} x=t-1 \\ y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR \\ z=t \end{cases}$$ إذن : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$

4.أ/ تبيان أن (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ و $\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-1;2)$ ومنه : $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن

$\vec{u}_{(\Delta)}//\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن (Δ) و (ABC) متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي ω

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

ب/ استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لتبيان أن ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

5. النقطة G_α مرجح الجملة $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ حيث : α عدد حقيقي

- تعين احداثيات النقطة G_α :

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

- استنتاج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في IR :

لدينا : $\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2 \;;\alpha^2\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2 \end{cases}$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

$\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\lambda+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\lambda \;;\lambda\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\lambda \end{cases}$ ومنه تمثل النقط G_α مستقيم

التمرين الرابع :

I. لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1, x>0$ و $f(0)=1$

1. حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1=-\infty$$

2. دراسة قابلية إشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لانها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية إشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1-1}{x}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{2}x\left(3-\ln x^2\right)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{3}{2}x-x\ln x=0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

3. دراسة إتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتق:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$$f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)=x(3-2\ln x)-x$$

ومنه : $f'(x)=2x(1-\ln x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $2x>0$

$f'(x)\geq 0$ يكافىء $(1-\ln x)\geq 0$ يكافىء $\ln x\leq 1$ أي $x\leq e$ أي $x\in]0;e]$ إذن :

$x\in]0;e]$ يكافىء $f'(x)\geq 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما ونستنتج $x\in[e;+\infty[$ يكافىء $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1 ↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘ $-\infty$

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$

تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$: من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ و مستمرة على هذا المجال و لدينا : $f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا وحيدا α في المجال

$[e;+\infty[$ (نلاحظ على المجال $[0;e]$ أن $f(x)\geq 1$) وهكذا
يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$:

لدينا : $f(4,6)=$ و $f(4,7)=$ أي : $f(4,7)\times f(4,6)<0$

5ـكتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(D): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $(D): y=2x+\frac{1}{2}$

II.لدينا : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$:

1.حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g'(x)=f'(x)-2$ أي $g'(x)=2x(1-\ln x)-2$

الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g''(x)=2(1-\ln x)+2x\left(\frac{-1}{x}\right)$ أي $g''(x)=-2\ln x$

- **دراسة إتجاه تغير g' :**

$g''(x)\geq 0$ يكافىء $-2\ln x\geq 0$ يكافىء
$\ln x\leq 0$ يكافىء $0<x\leq 1$ إذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x)<0$ يكافىء $-2\ln x<0$ يكافىء
$\ln x>0$ يكافىء $x<1$ إذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

- **جدول تغيرات g' :**

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	−
$g'(x)$	-2 ↗	0	↘ $-\infty$

- **إشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$:**

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)\leq 0$

2ـتحديد إتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال ـ1ـ $g'(x)\leq 0$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ـجدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	−
$g(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

$g(1)=0$

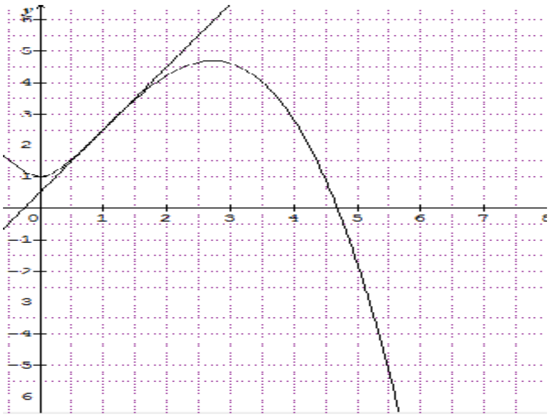
من جدول تغيرات الدالة g نجد : $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in]0;1]$

$g(x)\leq 0$ من أجل $x\in [1;+\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : يعود إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-2x-\frac{1}{2}$ أي إشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

3ـإنشاء (C_f) و (D) :



III.1.حساب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة:

لدينا : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,dx$ ، نضع : $u'(x)=x^2$ ، $v(x)=\ln x$ ومنه : $u(x)=\frac{x^3}{3}$ ، $v'(x)=\frac{1}{x}$

إذن : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx$

ومنه:

أي $I_n=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

بعد التبسيط نجد : $I_n=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{n^3}\right)$

$I_n=\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)-\frac{1}{9}$

2ـاستنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$:

بما أن $0<\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ أي $0<x<1$ فإن $f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$

حسب السؤال ـ2ـ من الجزء ـII ـ أي من أجل $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ فإن : $f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$ و بالتالي

ولدينا : $A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)dx$

ومنه :
$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x)+1-2x-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x$$

ومنه
$$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x\right)dx$$
$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x dx$$

بعد التبسيط نجد : $A(n)=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-I_n$

وبعد التبسيط
$$A(n)=-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-I_n$$
$$=-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)+\frac{1}{9}$$

نجد:
$$A(n)=\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)+\frac{1}{9}\right)\times 4cm^2$$

<u>حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}A(n)$:</u>

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}=0$ ومنه نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}\times 4=\frac{4}{9}$

<u>ملاحظة هامة</u> : تضرب قيمة المساحة بمربع وحدة الطول أي بالعدد $2\times 2=4$