امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة ماي 2015)

الشعبة : **رياضيات**   المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\left(z+\sqrt{3}-3i\right)\left(z^2-6z+12\right)=0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

أ- احسب الجداء : $\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1436}\times\left(\frac{z_C}{2\sqrt{3}}\right)^{2015}$. (تعطى النتيجة على الشكل الجبري)

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

جـ- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك .

3) لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E=3-\sqrt{3}$.

أ- عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه E ويحول A إلى C ، محدّدا نسبته وزاويته .

ب- استنتج طبيعة المثلث EAC .

4) أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-z_A\right|^2-\left|z-z_B\right|^2=-12$.

جـ- عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-z_A\right|^2+\left|z-z_B\right|^2=12$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 4$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ- برّر لماذا (u_n) متقاربة .

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln u_n - \ln 4$.
أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3) عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 3.96$.
4) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

1) أ- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
ب- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$.
جـ- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من العددين S_{2015} و S_{2014} .
2) حل ، في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، الجملة : $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ PGCD(x\,;y) = 7 \end{cases}$
3) نعتبر ، في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، المعادلة (E) ذات المجهول x : $3x(x+2) \equiv 2\,[7]$
أ- حل ، في المجموعة $\mathbb{Z}$ ، المعادلة (E) .
ب- N عدد طبيعي يكتب $\overline{361}$ في نظام التعداد الذي أساسه α وباقي القسمة الإقليدية للعدد N على 7 هو 3 .
- عين قيم العدد الطبيعي α ، وتحقق أن العدد 1436 قيمة ممكنة للعدد α .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 e^{1-x}$ ، (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
أ- ادرس تغيّرات الدالة f .
ب- ارسم المنحني (C_f) .
جـ- m وسيط حقيقي موجب تماما . ناقش بيانيا ، حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة : $e x^2 + e^x \ln m = 0$.
2) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x e^{1-x}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .
أ- ادرس تغيّرات الدالة g .
ب- بيّن أن المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .
جـ- عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم المنحني (c_g) .
3) احسب ، بوحدة المساحة ، المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) ، (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.
4) من أجل كل عدد طبيعي n نعرّف التكامل I_n كما يلي : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$.
أ- احسب القيمة المضبوطة للعدد I_0 .
ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$.
جـ- قارن بين A و $I_1 - I_2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) S تحويل نقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=-\left(\sqrt{3}+i\right)z-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

أ- عيّن صورة النقطة Ω ذات اللاحقة i بالتحويل S ، ما ذا تستنتج ؟

ب- ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S\left(A_n\right)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z_n-i=2^n e^{i\left(\frac{7n\pi}{6}\right)}\left(z_0-i\right)$.

ب- استنتج أنه يوجد تشابه مباشر مركزه Ω ويحوّل A_0 إلى A_n يطلب تعيين نسبته وزاويته .

جـ- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط Ω ، A_0 و A_n في استقامية .

3) نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة كما يلي : $u_0=\Omega A_0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\Omega A_n$.

أ- بيّن أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين حدّها الأول وأساسها .

ب- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، (D) المستقيم المار بالنقطتين $A\left(0;-1;3\right)$ و $B\left(3;0;1\right)$ ، (Δ) المستقيم المعرف بجملة المعادلتين :
$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

1) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) .

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ) .

2) (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ) .

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

3) (P') المستوي الذي يشمل (Δ) ويوازي (D) .

يّن أن $\vec{n}\left(-1;1;-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') .

4) أ- احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P) .

ب- احسب المسافة بين نقطة كيفية من (D) والمستوي (P') .

جـ- استنتج المسافة بين المستقيمين (D) و (Δ) .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) : $3x-2y=1$.

2) n عدد طبيعي ، a و b عددان طبيعيان حيث : $a=14n+3$ و $b=21n+4$.

أ- بيّن أن الثنائية $(a\,;b)$ حل للمعادلة (E) .

ب- استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $2n+1$ و $21n+4$.

أ- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $d=13$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، نضع :

$$A=21n^2-17n-4 \quad \text{و} \quad B=28n^3-8n^2-17n-3$$

أ- بيّن أن كلا من العددين A و B يقبل القسمة على $n-1$.

ب- عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$ ، (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيّرات الدالة f .

2) أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{x})$.

ب- بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

جـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) .

3) أنشئ (D) و (C_f) .

4) نعتبر g الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^{|x|})$.

أ- بيّن أن الدالة g زوجية .

ب- اعتمادا على المنحني (C_f) ، ارسم المنحني (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق .

II) 1) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α .

ب- بيّن أنه ، من أجل كل $x\geq 0$ ، $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$.

جـ- استنتج أنه ، من أجل كل $x\geq 0$ ، $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4}|x-\alpha|$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq 0$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

جـ- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د- احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.