متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية

تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة : رياضيات إعداد : شايبي أمين

الإجابة	العلامة

الموضوع الثاني

التمرين الأول

❶ **حل في مجموعة الأعداد المركبة** $\mathbb{C}$ ، **المعادلة** : $(z-2)(z^2-2z+4)=0.........(E)$:

لدينا $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ تكافيء $\begin{cases} z=2................(1) \\ z^2-2z+4=0.......(2) \end{cases}$

- حل المعادلة (2) : لدينا $\Delta'=b'^2-a.c=(-1)^2-1.4=-3=i^2.3$ ومنه $\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{3}$

ومنه نجد $z_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1}=1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

ومنه المعادلة (E) لها ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ وهي : $z_C=1-i\sqrt{3}, z_B=1+i\sqrt{3}, z_A=2$

❷ **أ) كتابة شكلا أسيا لكل من** z_B **و** z_C :

* $|z_B|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ، $\arg z_B=\arg(1+i\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

* $|z_C|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ ، $\arg z_C=\arg(1-i\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) الشكل الجبري للعدد $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}$:

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2015}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2015}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2015}=\cos\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)$$

وبالتالي $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ج) قيم العدد الطبيعي n **بحيث يكون** $z_B{}^n$ **عددا حقيقيا سالبا** :

$(z_B)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg(z_B)^n=k\pi$

$$\arg(z_B)^n=\arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=\arg\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{n\pi}{3}$$

ومنه $\arg(z_B)^n=k\pi$ معناه أن $\dfrac{n\pi}{3}=k\pi$ وبالتالي $n=3k\ \ /\ \ k\in\mathbb{N}$

❸ **أ- كتابة على الشكل الأسي العدد** $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1-i\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4}=-\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{4}=-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{i\pi}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

وبالتالي $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

ب – استنتاج أن C هي صورة B بتحويل نقطي :

لدينا $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|e^{i\frac{5\pi}{3}}\right|=1$ ولدينا $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{5\pi}{3}[2\pi]$ ومنه C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $z_A=2$ وزاويته $\frac{5\pi}{3}$.

❹ تحديد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$:

لدينا $AC=AB$, $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{5\pi}{3}$ و لدينا أيظا B و C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل ومنه الرباعي $OBAC$ **معين** .

التمرين الثاني

❶ تحليل العدد 320 إلى جداء عوامله الأوّلية ثمّ تعيين مجموعة قواسمه الطبيعية :

$320=32.10=2^6.5$ ومجموعة قواسمه هي : $320,16,80,64,40,32,20,16,10,8,5,4,2,1$

.

❷ x وy عددان طبيعيان أوّليان فيما بينهما. اثبات أنّ xy و $(x+y)$ أولّيان فيما بينهما:

لدينا $p\gcd(x,y)=1$ ونبرهن أن $p\gcd(xy,x+y)=1$

نضع $p\gcd(xy,x+y)=d$

لدينا إذن : $d/x+y$ و d/xy ومنه فإن d سيقسم كل مزج خطي بينهما ومنه $d/x(x+y)$ و d/xy

وبالتالي $d/x(x+y)-xy$ أي d/x^2 .....(1) .

من جهة أخرى $d/y(x+y)$ و d/xy ومنه $d/y(x+y)-xy$ وبالتالي d/y^2 ....(2)

من (1) و(2) لدينا d يقسم $p\gcd(x^2,y^2)$ ولكن $p\gcd(x^2,y^2)=1$ لأن $p\gcd(x,y)=1$ ومنه $d=1$

❸ a وb عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $7(a+b)^2=320m$ حيث $m=PPCM(a;b)$

- **تعيين كل القيم الممكنة لكلّ من العددين a وb:**

لدينا $p\gcd(a,b)=d$ وبوضع $a=a'd$, $b=b'd$ حيث $p\gcd(a',b')=1$.

بالتعويض في العبارة $ab=md$ نجد $a'd\,b'd=md$ أي $a'b'd^2=md$ ومنه $a'b'd=m$

وبالتعويض بقيمة m في العبارة $7(a+b)^2=320m$ نجد $7d(a'+b')^2=320a'b'$

$(a'+b')^2$ يقسم $320a'b'$ وبما أن $(a'+b')^2$ و $a'b'$ أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص $(a'+b')^2$ يقسم 320

ومنه $(a'+b')^2\in\{1,4,16,64\}$ وبالتالي $(a'+b')\in\{1,2,4,8\}$

ومنه $(a',b')\in\{(1,3),(1,7),(7,1)\}$

وبالتالي $(a,b)\in\{(7,1),(1,7)\}$.

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

❀**بالتوفيق في بكالوريا 2015**❀