الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية محمد العربي بن مهيدي

امتحان بكالوريا التجريبي — عين مليلـــة

الشعبة : علوم تجريبية — دورة ماي 2016

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 03 ساعات و نصف

على الطالب أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضـــوع الأول

التمرين الأول:(4.5 نقطة)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = e-1 \\ u_{n+1} = -1+\sqrt{u_n+1} \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$.

2. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-u_n^2-u_n}{\sqrt{u_n+1}+u_n+1}$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟ برّر .

3.- لتكن المتتالية $(\mathbf{v_n})$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\mathbf{v_n = \ln(u_n+1)}$.

أ- بيّن أن المتتالية $(\mathbf{v_n})$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول .

ب- أكتب $\mathbf{v_n}$ بدلالة $\mathbf{n}$ ثم أستنتج عبارة $\mathbf{u_n}$ بدلالة $\mathbf{n}$.

ج- أحسب $\mathbf{\lim u_n}$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + 3.v_1 + 3^2 v_2 + ... + 3^n v_n$.

هـ- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = (u_0+1)\times(u_1+1)\times .... \times(u_n+1)$ ،

ثم بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^2$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $\mathbf{A(7;1;1)}$ ، $\mathbf{B(1;7;1)}$ ، $\mathbf{C(1;1;7)}$ و $\mathbf{D(-1;-1;-1)}$

1.- أ) بيّن أن النقط $\mathbf{A}$ ،$\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ تعين مستويا (P)، ثم تحقق أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي: $x+y+z-9=0$.

ب) تحقق أن المستقيم (OD) عمودي على المستوي (P) .

جـ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OD) .

د) بيّن أن النقطة $H(3;3;3)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) ، و أنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

2. ليكن (Q) المستوي المحوري للقطعة $[CD]$.

أ) تحقق أن المعادلة : $x+y+4z-12=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب) بيّن أن المستقيم (OD) و المستوي (Q) يتقاطعان في نقطة Ω يطلب تعيين احداثياتها .

ج) بيّن أن Ω هي مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

د) بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثالث:(05 نقطة)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (1)....... $z^3-12z^2+48z-128=0$

أ- بيّن أن 8 حلا للمعادلة (1) .

ب- بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل $(z-8)(z^2+\alpha z+\beta)=0$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ج- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (1) .

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=2-2\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=8$.

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب. أكتب على الشكل الجبري ثم الاسي العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ و أستنتج طبيعة المثلث ABC .

3. لتكن النقطة D صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ- أحسب z_D لاحقة النقطة D .

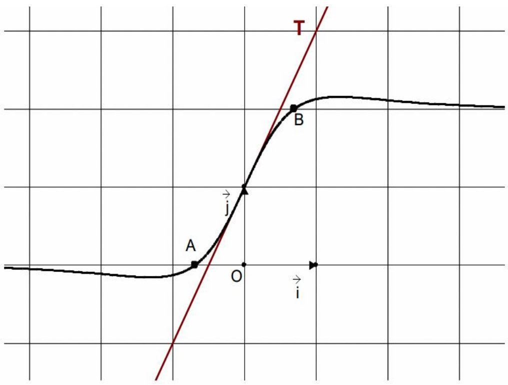
ب- أستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

4. أ- عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;|z_A|),(B;|z_B|),(C;|z_C|)\}$.

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z : $z=5+K.e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث K يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I/ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$. يعطى تمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، حيث النقطة $I(0;1)$ مركز تناظرله والمستقيم (T) مماس له في هذه النقطة كما هو موضح في الشكل .



1. أ- أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسّر النتائج هندسيا.

ب - عيّن فاصلة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

جـ - أستنتج فاصلة النقطة B من (C_f) التي ترتيبتها 2 .

2. بقراءة بيانية و بدون حساب :

أ - شكل جدول إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب - أوجد قيمة $f'(0)$ ، ثم أكتب معادلة لـ (T) .

3. أ- جد الدّالة الأصلية G للدّالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق $G(0)=-1$.

ب - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=0$ و $x=ln\,3$

II/ نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=ln(e^{2x}-e^x+1)-1$. (Γ) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- أحسب نهاية الدالة F عند $-\infty$. فسّر النتيجة هندسيا .

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x)=2x-1+ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

جـ - أحسب نهاية الدالة F عند $+\infty$.

د - بيّن أن المنحني (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلة له $y=2x-1$ عند $+\infty$.

2. مستعملا الجزء $(I/)$ أستنتج اتجاه تغير الدّالة F ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أرسم (Δ) و (Γ) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2}$

1. أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \alpha n - 1$ ، حيث α عدد طبيعي.

أ. عيّن α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب. أكتب v_n بدلالة n .

جـ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

4. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و K

التي تحقق العلاقة : $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \lambda\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ حيث λ عدد حقيقي .

- عيّن λ حتى تكون النقطة K مرجحا للجملة $\{(A;s_0),(B;s_1),(C;s_2)\}$.

التمرين الثاني:(4.5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(3;2;0)$، المستوي (P) المار بالنقطة B و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له ، المستوي (Q) الذي معادلة له : $x - y + 2z + 4 = 0$ ، سطح الكرة (S) التي مركزها A و نصف قطرها AB .

1. بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي : $2x + y - z - 8 = 0$.

2. أكتب معادلة لسطح الكرة (S).

3. أ- أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (Q) . أستنتج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S) .

ب- هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) ؟

4. لتكن النقطة $C(0;2;-1)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) .

أ- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .

ب- ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

بيّن أن تمثيل وسيطي للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \quad / \ t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3t \end{cases}$.

ج- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) .

د- نسمي (R) المستوي المعرف بالنقطة A و المستقيم (D) .

هل الجملة الآتية صحيحة أو خاطئة ؟ علل إجابتك ." كل نقطة من (R) متساوية المسافة عن النقطتين B و C "

التمرين الثالث : (05 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ،نعتبر $P\left(z\right)$ كثير الحدود المعرف من أجل كل عدد مركب z كما يلي : $P\left(z\right)=z^{3}-5z^{2}+12z-8$

1. أ. تحقق أن العدد 1 جذر لــ $P\left(z\right)$.

ب. عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-1)(z^{2}+\alpha z+\beta)$.

جـ. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2+2i$ ، $z_B=2-2i$ و $z_C=1$.

أ. علم النقط A ، B و C .(يتمم الشكل في باقي مراحل التمرين)

ب. أكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=2$.

3. أ- عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3 .

ب-عيّن لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{2}$.

4. أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم أستنتج طبيعة المثلث ADE

5. أ- لتكن النقطة I منتصف القطعة $[ED]$ و النقطة H نظيرة A بالنسبة إلى I . عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ADHE$.

ب- عيّن و أنشئ المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|$

التمرين الرابع : (06.5 نقاط)

[I] نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=x^{2}-1+2x^{2}\ln x$

1. أدرس تغيرات الدّالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2. بيّن أن $x^{2}-1$ و $2x^{2}\ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;+\infty[$ ،ثم أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

[II] f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=(x^{2}-1)\ln(x)$ ، نسمي (C_f) التمثيل البياني لدالة f في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدته $3cm$.

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ ،ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.

ب- أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أنشئ المنحني (C_f) .

4. أ- بيّن أن الدالة $u:x\mapsto\frac{x^{3}}{3}-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^{2}-1$ على $\mathbb{R}$.

ب- باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن $\int_{1}^{2}(x^{2}-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$.

جـ- أحسب بـ cm^{2} مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$