مديرية التربية لولاية الجزائر شرق
امتحان بكالوريا تجريبي

ثانوية أحمد البيروني – الحراش
الشعبة: تقني رياضي

يوم 05 – 05 – 2016

اختبار في مادة الرياضيات

المدة: 4 ساعات و نصف ساعة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

I) المتتالية المعرفة (u_n) على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \text{ ; } n \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي

1) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f حيث $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$

2) باستعمال الرسم المحصل عليه، مثل على محور الفواصل و بدون حساب، الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leqslant 8$

5) تحقق أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. هل هي متقاربة؟ برر اجابتك.

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 8$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ و $Q_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$

5) أحسب بدلالة n الجداء: $\pi_n = v_0.v_1.v_2.\cdots.v_n$

التمرين الثاني (3.5ن):

a عدد مركب حيث : $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1) عين العدد المركب a^2 ثم أكتبه على الشكل المثلثي ثم الأسي.

2) أحسب a^4 ثم بين أنّ $a^4.(\bar{a})^4 = 1$

3) نضع $z = a^4 - 1 - i\sqrt{3}$

-أ- عين طويلة و عمدة z ثم أكتب النتيجة على الشكل المثلثي ثم الأسي.

-ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n عددا حقيقيا.

4) بالاعتماد على جواب السؤال الأول:

-أ- عين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

-ب- عين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

التمرين الثالث(3ن):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

(S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث: $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1) بين أن (S) هي سطح كرة مركزها $F(0;2;-1)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$

2) -ا- تحقق أن النقطة $A(-1;1;0)$ تنتمي الى سطح الكرة (S)

-ب- أكتب معادلة للمستوي (P) المماس لـ (S) عند النقطة A

3) -ا- تحقق من أن : $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطة $B(1;3;-2)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له.

-ب- بين أنّ المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.

التمرين الرابع(6ن):

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\mathrm{e}^{-x}+x-1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2) بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geqslant 0$، استنتج أنّ: $\mathrm{e}^{-x}+x\geqslant 1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}+x}$، وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بيّن أنّ مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$

2) -ا- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x\mathrm{e}^{x}}}$،

-ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. فسر النتيجتين بيانيا.

3) -ا- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x}+x)^2}$

-ب- أدرس اشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) -ا- أكتب معادلة لمماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة O

-ب- تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$، ثم استنتج اشارة $x-f(x)$

-ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

5) أنشئ (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}-1=m$

التمرين الخامس (3.5ن):

1) -ا- جد بواقي القسمة الاقليدية على 10 للعدد 8^n من أجل $n\in\{1;2;3;4;5\}$

-ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم m يكون رقم آحاد العدد 6^m هو 6.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $8^{4k+1}\equiv 8[10]$. ثم استنتج بواقي قسمة الأعداد 8^{4k+1} ، 8^{4k+2} ، 8^{4k+3} و 8^{4k+4} على 10.

-ج- بين أن العدد $A=2012^{1431}+2016^{1437}+1438^{2016}$ يقبل القسمة على 10

2) حل المعادلة (1) ذات المجهولين الصحيحين x و y: $x-21=64y\cdots(1)$

3) يكتب عدد N في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل: $N=\overline{\lambda\beta 2\alpha}$ حيث باقي قسمة α على 10 هو 5

-ا- عين قيمة العدد α ثم تحقق أن الثنائية $(N;\beta+8\lambda)$ حل للمعادلة (1)

-ب- جد β و λ علما أن $\beta+8\lambda=31$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $-4x-3y+1=0$ والأشعة $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-8\\9/2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ و المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيط معرف بـ: $\begin{cases}x=t\\y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}t\end{cases}$

1) تحقق أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل $A(1;1;0)$ و $\vec{v}$ شعاع توجيه له.

3) -ا- بين أن الشعاع $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

-ب- أحسب $\vec{u}\cdot\vec{n}$ و $\vec{v}\cdot\vec{n}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ)

4) -ا- أحسب المسافة بين النقط $M(x;y;z)$ و كل من المستويين (P) و (Q)

-ب- أثبت أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية البعد عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما. ثم بين أن (P_1) و (P_2) متعامدان.

5) عين مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها حلول الجملة التالية: $\begin{cases}4x+3y-1=0\\3x-4y-3=0\\x+3y+4z+2=0\end{cases}$

التمرين الثاني(4.5ن):

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z: $z^2-2z+10=0\ \cdots(E)$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_c=-3+i$ و $z_D=\overline{z_B}$

-ا- أحسب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ و اكتبه على الشكل الأسي، و استنتج أن المثلث ABC قائم في B

-ب- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه B و يحول A إلى C.

-ج- عين z_E لاحقة النقطة E بحيث تكون النقطة D صورة E بالتشابه S.

-د- عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $z=z_E+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$

3) -ا- عين z_F لاحقة النقطة F بحيث: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DB}$

-ب- استنتج نسبة التحاكي h الذي مركزه B و يحول D إلى F.

-ج- عين عناصر التحويل S' حيث: $S'=h\circ S$

-د- استنتج (Γ')، مجموعة النقط $M(z)$، صورة (Γ) بالتحويل S'

التمرين الثالث(8.5ن):

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(I) f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$، وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. وليكن $(\mathscr{C}')$ التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = \dfrac{1}{x}$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند 0، فسر النتيجة بيانيا.
2) أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f.
3) عين احداثيات النقطة I تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حامل محور الفواصل.
4) من أجل $x \in]0;+\infty[$ نضع: $g(x) = 1 - x + 2\ln x$
 -ا- أدرس تغيرات الدالة g
 -ب- برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا و حيدا في المجال $]0;2]$ و حل آخر α في المجال $]2;4[$
5) -ا- بين أن $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ و استنتج أن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتقاطعان في نقطتين
 -ب- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x أكبر من أو يساوي 4: $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$
6) أرسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ في نفس المعلم.

(II) 1) ليكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات التي معادلتها : $x = 1$ و $x = \alpha$ (α العدد الحقيقي المعرف في السؤال ب.I.4) و $y = 0$
 -ا- أحسب $A(\alpha)$ مقدر بوحدة المساحة (استعمل التكامل بالتجزئة).
 -ب- برهن أن $A(\alpha) = \alpha - \dfrac{2}{\alpha}$
2) لتكن (I_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$
3) -ا- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4: $0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
 -ب- استنتج نهاية المتتالية (I_n). ماذا يمكن القول عن تقاربها؟
 -ج- نضع $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$. أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(III) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الدالة f_n المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f_n(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^{2n}}$

1) أحسب المشتقة f_n' للدالة f_n.
2) حل المعادلة $f_n'(x) = 0$ و ليكن x_n حل لهذه المعادلة.
3) أحسب نهاية المتتالية (x_n)

التمرين الرابع(3ن):

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 13
2) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون : $3^n + 13 \equiv 0[13]$
3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $27^{n+1} - 1 \equiv 0[13]$
استنتج أن العدد الطبيعي $3^{6n+6} - 2 \times 3^{3n+3} + 1$ مضاعف للعدد 169 (لاحظ أن $13^2 = 169$)

☺ بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا 2016 ☺