التصحيح النموذجي لاختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول(4ن):

1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n:

$3^0\equiv 1[10]$ ، $3^1\equiv 3[10]$ ، $3^2\equiv 9[10]$ ، $3^3\equiv 7[10]$ ، $3^4\equiv 1[10]$

منه $3^{4k}\equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2}\equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3}\equiv 7[10]$ ، حيث $k\in\mathbb{N}$ — 0.5ن 0.5ن

2) الإثبات أنّه من أجل كل عددطبيعي n: $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

لدينا: • $33\equiv 3[10]$ و منه $33^{16n+2}\equiv 3^{16n+2}[10]$ و بما أن $3^{16n+2}=3^{4(4n)+2}$ فإن $\boxed{33^{16n+2}\equiv 9[10]}$

• $109\equiv 9[10]$ و منه $109^{8n+1}\equiv 9^{8n+1}[10]$ و بما أن $9^{8n+1}=3^{16n+2}$ فإنّ $9^{8n+1}\equiv 9[10]$ و بالتالي $109^{8n+1}\equiv 9[10]$ و منه $\boxed{2\times 109^{8n+1}\equiv 8[10]}$ ، و لدينا: $\boxed{11\equiv 1[10]}$

ومنه $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 9-8-1[10]$ أي $\boxed{33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]}$ — 0.5ن

3) ايجاد الأعداد الطبيعية n حيث: $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10<n\leqslant 25$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7\times 3^{n+1}-1\equiv$	0	2	8	6	$[10]$

منه $n=4k \setminus k\in\mathbb{N}$

بماأن $10<n\leqslant 25$ فإنّ $10<4k\leqslant 25$ أي $\frac{10}{4}<k\leqslant\frac{25}{4}$ منه $k\in\{3;4;5;6\}$ و بالتالي $\boxed{n\in\{12;16;20;24\}}$ — 1ن

4) $A=\overline{xx02102}^{3}=\overline{y67y}^{9}$

أ) ايجاد x و y

لدينا: $0<x<3$ و $0<y<9$ مع $x\in\mathbb{N}$ و $y\in\mathbb{N}$

و لدينا: $\begin{cases}A=2+1\times 3^2+2\times 3^3+x\times 3^5+x\times 3^6\\ A=y+7\times 9+6\times 9^2+y\times 9^3\end{cases}$ أي $\begin{cases}A=65+972x\\ A=549+730y\end{cases}$ و منه $972x-730y=484$

• إذا كان $x=1$ فإن $y=\frac{244}{365}\notin\mathbb{N}$ مرفوض

• إذا كان $x=2$ فإن $y=2$ اذن $\boxed{(x;y)=(2;2)}$ — 1ن

ب) كتابة A في النظام العشري: $A=65+972\times 2=2009$، $\boxed{A=2009}$ — 0.5ن

ج) كتابة A في النظام ذي الأساس 7:

$2009=287\times 7+\boxed{0}$ ، $287=41\times 7+\boxed{0}$ ، $41=5\times 7+\boxed{6}$ ، $5=0\times 7+\boxed{5}$ منه $\boxed{A=\overline{5600}^{7}}$ — 0.5ن

التمرين الثاني(5ن):

1) أ) لنتحقق أن $\begin{cases}x=t\\ y=-t\ ,t\in\mathbb{R}\\ z=3t\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA)

$M(x,y,z)\in(OA)$ معناه يوجد t من $\mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OA}$ أي $\begin{cases}x=t\\ y=-t\ ,t\in\mathbb{R}\\ z=3t\end{cases}$ — 0.5ن

ب) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) العمودي على (OA) في النقطة A.

(Q) عمودي على (OA) في النقطة A معناه (Q) يشمل A و $\overrightarrow{OA}$ ناظم له ، اذن : $(Q): x-y+3z+d=0$

$A\in(\mathbb{Q})$ معناه $1+1+9+d=0$ أي $d=-11$ ومنه $\boxed{(Q): x-y+3z-11=0}$ ن0.75

ج) التحقق من أن $(P)\parallel(Q)$

لدينا : شعاع ناظمي لـ (P) هو $\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ و شعاع ناظمي لـ (Q) هو $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ، بماأن $\vec{n}_P=\vec{n}_Q$ فإن $(P)\parallel(Q)$ ن0.5

2) أ) الاثبات أن $\omega(a,b,c)$ مركز سطح الكرة (S) تنتمي إلى (OA)

ω مركز سطح الكرة (S) ينتمي الى (OA) لأن المبدأ O هو المسقط العمودي لـ ω على (P) و $(Q)\parallel(P)$ و منه ω مركز (S) ينتمي الى (OA) ن0.5

• استنتاج أن $b=-a$ و $c=3a$

لدينا $\omega(a;b;c)\in(OA)$ معناه $\begin{cases}a=t\\b=-t\\c=3t\end{cases}$ أي $\begin{cases}b=-a\\c=3a\\a\in\mathbb{R}\end{cases}$ ن0.5

ب) تبيان أن $\omega A^2-\omega O^2=33$

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورث: $R^2=\omega O^2+r^2$ منه $R^2-\omega O^2=r^2$ أي $\omega A^2-\omega O^2=r^2$، اذن $\boxed{\omega A^2-\omega O^2=33}$ ن0.75

• استنتاج أن $a-b+3c=-11$

من العلاقة $\omega A^2-\omega O^2=33$ ينتج: $(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2-a^2-b^2-c^2=33$ أي $-2a+b-6c=33$

و منه $\boxed{a-b+3c=-11}$ ن0.5

ج) استنتاج احداثيات ω

لدينا: $\begin{cases}a-b+3c=-11\\b=-a\\c=-3a\end{cases}$ يكافئ $a+a+9a=-11$ و منه $a=-1$ ، $b=1$ و $c=-3$ و بالتالي $\boxed{\omega(-1;1;-3)}$ ن0.5

• اثبات أن $R=2\sqrt{11}$

لدينا: $R^2=O\omega^2+r^2$ معناه $R^2=(1+1+9)+33$ أي $R^2=44$ و منه $\boxed{R=2\sqrt{11}}$ ن0.5

التمرين الثالث(11ن):

$\boxed{I}$ 1) اتمام جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة:

بماأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x\ln x=0$ فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to0} g(x)=1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(-1+\frac{1}{x}+\ln x)=+\infty$

أي $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$ ن1

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) إشارة $g(x)$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\geqslant 0$ لأن g تقبل 0 كقيمة حدية صغرى . ن0.5

3) أ) إثبات أن $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C})$ يشتركان في نقطتين فاصلتهما 1 و e

فواصل نقط تقاطع $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C})$ هي حلول المعادلة : $g(x)=\ln x$ معناه $-(x-1)+(x-1)\ln x=0$

معناه $(x-1)(-1+\ln x)=0$

معناه $x-1=0$ أو $-1+\ln x=0$

أي $\boxed{x=1 \text{ أو } x=e}$ ن1

ب) اثبات أنه من أجل كل x من $x\in[1;e]$ فإن: $g(x)\leqslant\ln x$

$g(x) \leqslant \ln x$ معناه $(x-1)(-1+\ln x) \leqslant 0$

x	0			1		e		$+\infty$
$x-1$	||	$-$		0	$+$		$+$	
$-1+\ln x$	||	$-$			$-$	0	$+$	
$(x-1)(-1+\ln x)$	||	$+$		0	$-$	0	$+$	

إذن $\boxed{g(x) \leqslant \ln x \text{ معناه } x \in [1;e]}$ 0.5ن

$\boxed{II}$ 1) تبيان أنّه من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}=\frac{-(-x+1+x\ln x)}{x(x-1)^2}$$

أي $\boxed{f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x(x-1)^2}}$ من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$ 1ن

المقام موجب تماما، اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط اي عكس إشارة $g(x)$ و بما أن $g(x)>0$ من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$ فإنه $f'(x)<0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$ 0.5ن

2) بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{x-1}=-1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{x-1}=+\infty$ أي $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty}$ 0.5ن

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\ln'(1)$ أي $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1}$ 0.5ن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=0\times 1$ أي $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$ 0.5ن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ منه محور الفواصل (xx') مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ 0.25ن

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ منه محور التراتيب (yy') مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ 0.25ن

3) جدول التغيرات: 0.5ن

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1 || 1	$\searrow$	0

5) إثبات أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع (d)، حيث $(d): 2y-1=0$، في نقطة و حيدة فاصلتها α حيث $3.5 \leqslant \alpha \leqslant 3.6$

هذا معناه اثبات أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]3.5;3.6[$:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[3.5;3.6]$ و $f(3.5)=0.501$ و $f(3.6)=0.493$ أي $f(3.6) \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant f(3.5)$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي و حيد α حيث $\alpha \in]3.5;3.6[$ و يحقق $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}$ 1ن

5) إنشاء $(\mathcal{C}_f)$ 0.5ن

$\boxed{III}$ لدينا : $h(x)=\dfrac{\ln(x+a)}{x}+b$ و $D_h=]-a,0[\cup]0;+\infty[$

1) تعيين a و b

لدينا $A(1;0)\in(\mathcal{C}_h)$ معناه $h(1)=0$ أي $\ln(1+a)+b=0$

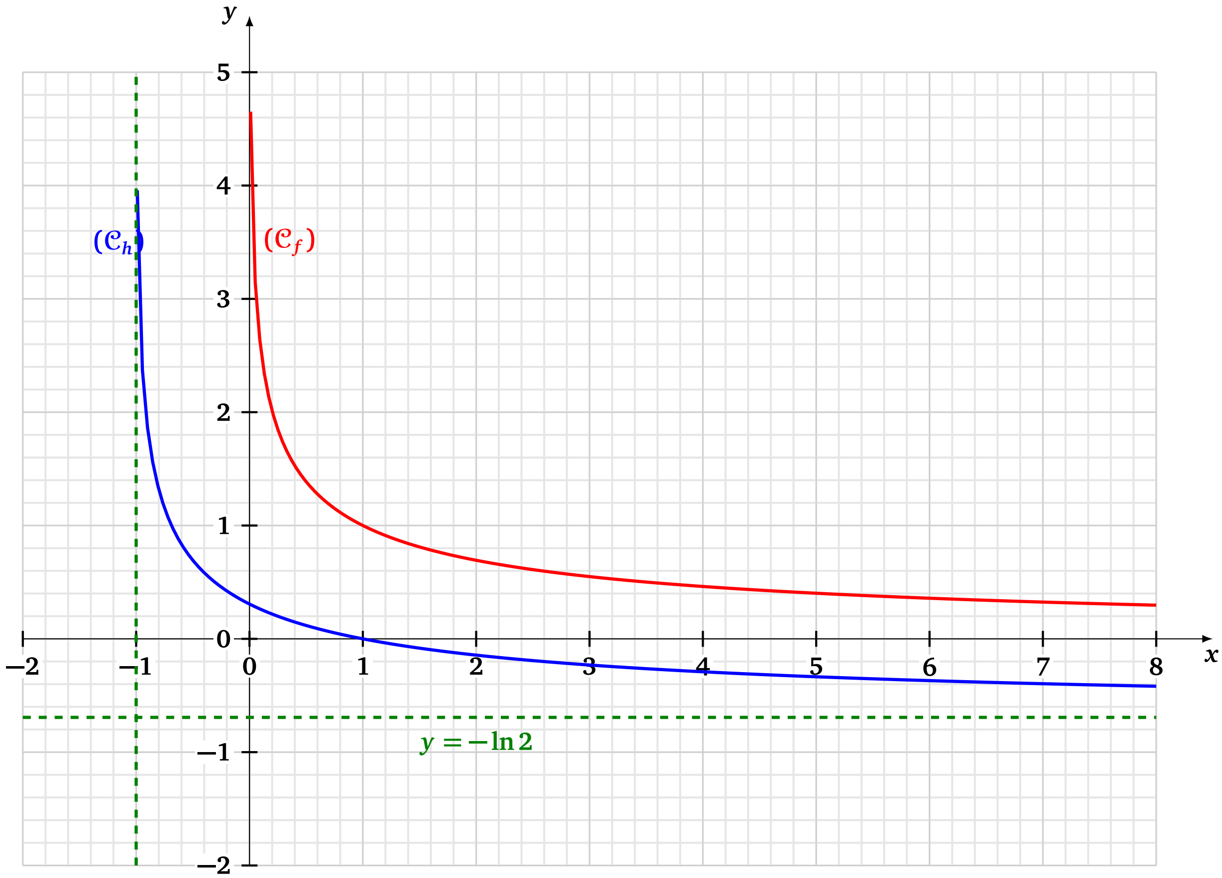
و لدينا $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته $y=-\ln 2$ في جوار $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\ln 2$

أي $\boxed{b=-\ln 2}$ ومنه $\ln(1+a)=\ln 2$ و منه $\boxed{a=1}$ 0.5ن

و بالتالي $\boxed{f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}-\ln 2}$ 0.5ن

2) كتابة $h(x)$ بدلالة $f(x)$: $h(x)=f(x+1)-\ln 2$ 0.5ن

$(\mathcal{C}_h)$ هو صورة $(\mathcal{C}_f)$ وفق انسحاب شعاعه $\vec{V}\binom{-1}{-\ln 2}$ 0.5ن

3) إنشاء $(\mathcal{C}_h)$ 	**0.5ن**