التمرين الأول : 6 نقاط

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=0$:

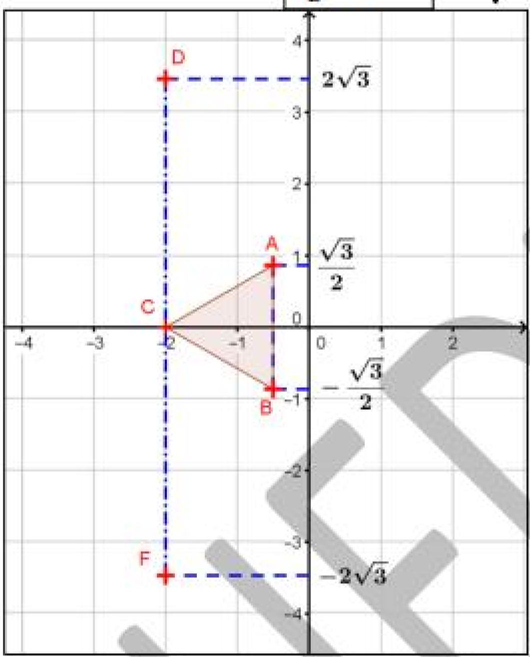
لدينا $\Delta=-3$، ومنه المعادلة تقبل حلين هما، $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

2) أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي وتمثيل النقط A، B، C، D و F:

لدينا، $|z_A|=1$ و لتكن θ_1 عمدة لـ z_A ومنه $\begin{cases}\cos\theta_1=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$ و عليه نجد: $\boxed{z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

- بما أن $z_B=\overline{z_A}$ $|z_B|=|z_A|$ و $\arg(z_B)=-\arg(z_A)$ ومنه نجد : $\boxed{z_B=e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

تمثيل النقط:



ب) طبيعة المثلث ABC :

بالحساب نجد: $AB=AC=BC=\sqrt{3}$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) أ) تعيين مركز و زاوية الدوران $\Re$:

لدينا عبارة الدوران $\Re$ هي من الشكل ،

$z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$ تكافئ $z'-z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_C)$ ومنه $\Re$ دوران مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب) تبيان أن $z_E=1+i\sqrt{3}$:

لدينا، $\Re(D)=E$ ومنه $z_E+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D+2)$ ومنه $z_E=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cancel{-2}+2\sqrt{3}i+\cancel{2}\right)-2$

و منه $z_E=i\sqrt{3}+3-2$ و عليه $\boxed{z_E=1+i\sqrt{3}}$.

ج) كتابة العدد $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}=\frac{-2-2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{-2+2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}i\left(\sqrt{3}i-3\right)}{-3+\sqrt{3}i}=\sqrt{3}i$$

استنتاج ان المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان:

CHEDDANI

لدينا ، $\arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}\right) = \arg\left(\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{EF}$ و عليه المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان .

4) <u>تعيين المجموعة</u> (Γ):

L عدد تخيلي صرف معناه $L = 0$ او $\arg(L) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

معناه $z - z_C = 0$ او $\left(\overrightarrow{EM};\overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$

معناه $M = C$ أو $M \in (\gamma) - \{E;C\}$ حيث (γ) هي الدائرة ذات القطر $[EC]$

المجموعة (C) هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E .

التمرين الثاني :

1) <u>تبيان أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي</u> (ABC):

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط A , B , C تحدد مستوي.

لدينا، $\begin{cases} x_A - 2z_A - 11 = 1 + 10 - 11 = 0 \\ x_B - 2z_B - 11 = 3 + 8 - 11 = 0 \\ x_C - 2z_C - 11 = 5 + 6 - 11 = 0 \end{cases}$ إذن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) <u>التمثيل الوسيطي للمستقيم</u> (T):

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (T) الذي يشمل النقطة D و الموجه بالشعاع $\vec{u}$ ومنه نجد:

$\overrightarrow{DM} = k\vec{u}$ مع $k \in \mathbb{R}$ ومنه : $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} / k \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (T).

3) <u>تبيان ان المستويين (ABC) و (P) متقاطعين وفق المستقيم</u> (Δ):

لدينا، $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ الشعاعين الناظمين للمستويين (ABC) و (P) على الترتيب

نلاحظ ان الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا و عليه فإن المستويين (ABC) و (P) متقاطعين وفق المستقيم

لدينا، $(11 + 2t) - 2(t) - 11 = 11 + 2t - 2t - 11 = 0$ إذن $(\Delta) \subset (ABC)$ ...(1)

$(11 + 2t) - (4 + t) - t = 11 + 2t - 4 - t - t = 7$ إذن $(\Delta) \subset (P)$ ...(2)

من (1) و (2) نجد: ان المستويين (ABC) و (P) متقاطعين وفق المستقيم (Δ)

4) أ) إيجاد بدلالة β معادلة ديكارتية لـ (Γ):

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\beta$ تكافئ $\begin{pmatrix}x-1\\y-4\\z+5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\beta$

تكافئ $2(x-1)-2(y-4)+z+5=\beta$

تكافئ $2x-2y+z+11-\beta=0$ و هي معادلة ديكارتية لـ (Γ)

و عليه (Γ) عبارة عن مستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

ب) تعيين قيمة β حتى تكون (Γ) المستوي المحوري لـ $[AB]$:

لدينا، $I\left(2;3;-\frac{9}{2}\right)$ منتصف القطعة $[AB]$

(Γ) المستوي المحوري لـ $[AB]$ معناه ، $I\in(\Gamma)$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له (محقق)

$I\in(\Gamma)$ معناه $2x_I-2y_I+z_I+11-\beta=0$ أي $4-6-\frac{9}{2}+11-\beta=0$ ومنه $\beta=\frac{9}{2}$

التمرين الثالث :

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|\right]=-\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|\right]=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|=+\infty$ لأن $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)\ln|x-1|=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{x-1}\left[x-(x-1)\ln(-x+1)\right]=-\infty$

التفسير الهندسي: $x=1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) يوازي محور التراتيب .

2) أ) تبيان أن الدالة f قابلة للإشتقاق على مجالي تعريفهــــا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا، $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-1-(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{-x}{(x-1)^2}$

و منه نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشـــــارة $-x$ لأن $(x-1)^2>0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$.

♦ f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$-\infty$

CHEDDANI

ب) التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]4;5[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]4;5[$ و لدينا ، $\begin{cases} f(5)=-0,13 \\ f(4)=0,4 \end{cases}$ بما أن $f(5)\times f(4)<0$ فإنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال $]4;5[$.

ج) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ)و (Δ') معامل توجيهه كل منهما هو -2:

$f'(x)=-2$ تكافئ $\frac{-x}{(x-1)^2}=-2$ تكافئ $x=2(x-1)^2$ أي $2x^2-4x+2=x$ أي $2x^2-5x+2=0$

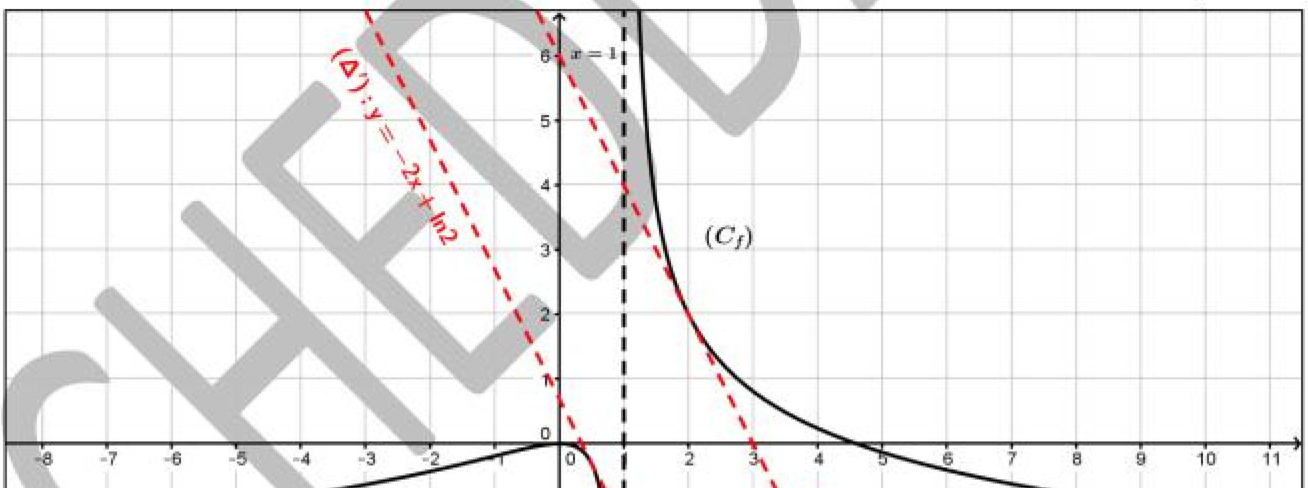
لدينا، $\Delta=9$ ومنه نجد: $x_1=2$ و $x_2=\frac{1}{2}$

الخلاصة: المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ)و (Δ') معامل توجيهه كل منهما هو -2 عند نقطتين فاصلتهما 2 و $\frac{1}{2}$ على الترتيب .

معادلة المماسين:

$$\begin{cases} (\Delta): y=f'(2)(x-2)+f(2)=-2(x-2)+2=-2x+6 \\ (\Delta'): y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1+\ln 2=-2x+\ln 2 \end{cases}$$

الرسم :



هـ) المناقشة الوسيطية :

$m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$ يكافئ $m=\frac{2x^2-x}{x-1}-\frac{(x-1)\ln|x-1|}{x-1}$ منه نجد :

$m=\frac{2x^2-x}{x-1}-\ln|x-1|$ يكافئ $-2x+m=-2x+\frac{2x^2-x}{x-1}-\ln|x-1|$ ومنه نجد: أي $-2x+m=f(x)$

ومنه حلول المعادلة يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+m$.

CHEDDANI

المناقشة: $m>6$: المعادلة تقبل حلين $m=6$: المعادلة تقبل حل وحيد

$\ln 2<m<6$: المعادلة لا تقبل حلول $m=\ln 2$: المعادلة تقبل حل وحيد

$m<\ln 2$: المعادلة تقبل حلين .

4) أ) حساب النهايتين:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{\ln|x-1|}{x}\right]=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{\ln(-x+1)}{x}\right]=0=h'_d(0)$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{f(-x)}{x}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{-1}{-x-1}-\frac{\ln|-x-1|}{x}\right]=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{-1}{-x-1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=0=h'_g(0)$$

الاستنتاج: الدالة h قابلة للإشتقاق عند 0 لأن $h'_d(0)=h'_g(0)=0$

ب) تبيان أن الدالة h زوجية :

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

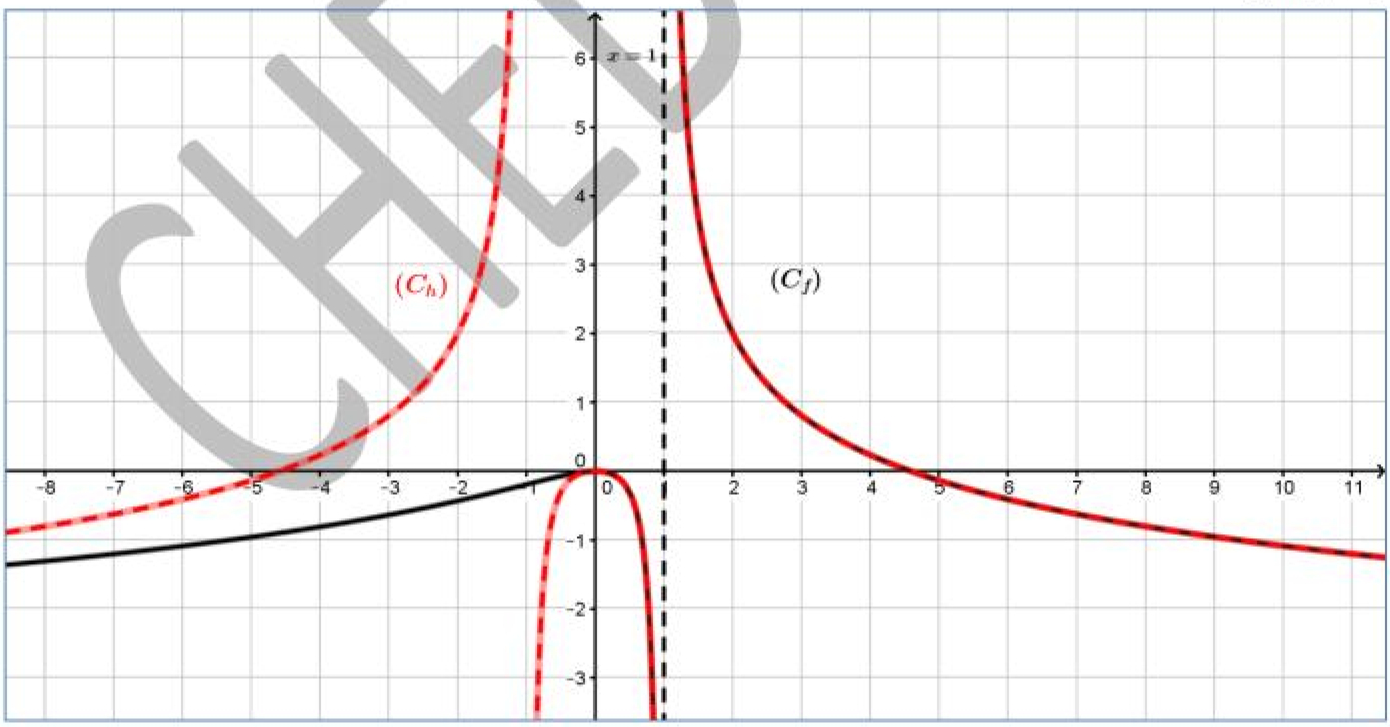
$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ إذن h دالة زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h): لدينا، $h(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x) \ ; x\in[0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x)\ ; x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$ ومنه تستنتج مايلي :

(C_h) منطبق على (C_f) لما $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$

بما أن الدالة h زوجية فإن منحناها يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

رسم (C_h) :



انتهى ------------ بالتوفيق بكـــــالوريا جوان 2016