اختبار في مادة الرياضيات شعبة :علوم تجريبية — دورة ماي2017 — المدة: 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول(04,5 نقاط) :

$f(z)$ كثير حدود للمتغير المركّب z: $f(z)=z^3-(2+i)z^2+2(2+i)z-4i$

1. تحقق أن : $f(i)=0$. ثم أوجد العددين الحقيقيين a و b حيث: $f(z)=(z-i)(z^2+az+b)$

2. أ. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $f(z)=0$ واكتب الحلول z_1 ، z_2 و i على الشكل الأسي. علما أن: $\mathrm{Im}(z_1)>0$

ب. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2017}$

3. في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن النقط: A ، B و C لواحقها على الترتيب: i، $1+i\sqrt{3}$ ، $1-i\sqrt{3}$.

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة :$\{(A,1),\ (B,1),(C,-3)\}$

ب) عين مجموعة النقط M والتي تحقق :$\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}-3.\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}-2.\overrightarrow{CM}\right\|$

4. h تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $-\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}-3.\overrightarrow{CM}$

بين أن h تحاك يطلب تعيين مركزه و نسبته.

التمرين الثاني(05 نقاط):

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد ومتجانس في الفضاء، لتكن النقط $A(1;-1;0)$ ، $B(0;-1;-1)$ ، $C(2;2;-2)$

1. أ. بين أن المثلث ABC متقايس الساقين، أوجد إحداثيات النقطة I منتصف [AB]. ثم أحسب S مساحة المثلث ABC .

ب.عين العددين الحقيقيين a و b حيث: $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\1\\b\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)، استنتج معادلة ديكارتية له.

2. لتكن النقطة $D(-1;1;-1)$. أحسب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC). ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3. ليكن المستوي (P) ذي المعادلة : $x+2y-z+3=0$.تحقق أن (P) و(ABC)متعامدان . ثم أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

4. (Q) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء وتحقق: $(2x+y-2z+1)^2-(3y+5)^2=0$

و (E)مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء وتحقق: $(2x+y-2z+1)^2+(3y+5)^2=0$

حدد طبيعة وعناصر المجموعتين (E) و (Q).

التمرين الثالث(03 نقاط):

.1 لتكن المتتالية الحسابية (v_n) المعرفة في $\mathbb{N}^*$ بالحدين : $v_8 = 15$, $v_2 = 3$

أ./ عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول v_1 ثم عبارة الحد العام v_n بدلالة n. حدد اتجاه تغيراتها.

ب./ بين وجود ستة حدود متعاقبة من المتتالية (v_n) مجموعها يساوي 2016، عين الحد الأول منها.

.2 لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n: $u_n = 2n-1-\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

أ. تحقق أن: $u_n = v_n - \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

ب. نضع: $w_n = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$. بين أن: $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = -\ln(2n+1)$

.3 باستعمال النتائج السابقة أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط) :

لتكن f الدالة المعرفة على I ، $I =]1;+\infty[$ حيث:. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ. أحسب نهاية الدالة f عند 1 . فسر النتيجة هندسيا.

ب. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ(d).

ت. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f'(x) = \frac{x^2-4}{2(x^2-1)}$ ثم أدرس إشارة $f'(x)$ على I وشكل جدول تغيراتها.

2. أ. لتكن g الدالة المعرفة على I حيث: $g(x) = f(x) - x$. بين أن الدالة g متناقصة على I.

ب. بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 2 و$\frac{5}{2}$

ج. أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

3. أ. بين أن الدالة H حيث: $H(x) = (x+1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\ln(x-1)$ أصلية للدالة h على المجال I

حيث : $h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. ب. أحسب مساحة الحيز المحصورة بين المنحنى(C_f) و(d) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 2$, $x = 4$

4. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة بحدها الأول v_0: $v_0 = 6$ وبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = f(v_n)$.

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n > \alpha$، **(α العدد المعرف في السؤال 2) ب)**

ب. بين أن المتتالية (v_n) متناقصة ، استنتج أنها متقاربة ، حدد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04,5 نقاط) :

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$معلم متعامد متجانس في الفضاء، (d_1) , (d_2) مستقيمان معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(d_2):\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad t' \in R \;;\quad (d_1):\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in R \;;$$

1. أ. عين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين(d_1) و (d_2).

ب. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (d_2) و (d_1).

2. أ. بين أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (P).

ب. بين أن النقطة Bهي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3. عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$شعاع ناظمي له.

4. عين إحداثيات C وD نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (d_1) و (d_2) على الترتيب.عين طبيعة المثلثBCD.

التمرين الثاني (04,5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$بـ:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. **الشكل المقابل**

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال$]1,+\infty[$.

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$بحدها الأول $u_0=6$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعيn.

أ. أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء.

ب ./برهن أنه من أجل كل عدد طبيعيn:$1 \le u_n \le 6$. ثم أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). وبين أنها متقاربة.

3. نعتبر المتتاليتين(w_n) ; (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$, $w_n = \ln(v_n)$

أ. أحسب w_0 ، وبين أن المتتالية(w_n) هندسية أساسها 2. أكتبw_n بدلالة n، ثم عبارة v_n بدلالة n.

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4. أحسب بدلالة n المجموع:$S_n = w_0+w_1+\ldots+w_n$.ثم أستنتج الجداء:$P_n= v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$بدلالة n.

التمرين الثالث (04 نقاط):

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. ولتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1-i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=1+\sqrt{2}+i$.

1. أ. أكتب z_A ، z_B على الشكل الأسي.

ب. بين أن : $z_A\times z_C=\sqrt{2}\times\overline{z_C}$ ثم استنتج أن: $k\in\mathbb{Z}$; $\arg(z_A)+2\arg(z_C)=2k\pi$.

جد عمدة لـ z_C ثم أكتب z_C على الشكل الأسي.

2. S التشابه المباشر الذي مركزه B والذي يحول النقطة C إلى النقطة A.

عين نسبة و زاوية التشابه. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3. أ. لتكن (E) مجموعة النقط M لاحقتها z تحقق: $(z-z_A)(\overline{z}-z_B)=2$

عين طبيعة وعناصر المجموعة (E). (لاحظ أن: $z_B=\overline{z}_A$)

ب. عين المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل S.

التمرين الرابع (07 نقاط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. الوحدة: $2cm$.

1. أ. أحسب نهايتي الدالة f عند$+\infty$ و $-\infty$. فسر النتائج هندسيا.

ب. أحسب عبارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f، شكل جدول تغيراتها.

ج. أحسب $f(1)$ ثم عين إحداثيات نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ، أنشئ (C_f)

2. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$.

3. أ. عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرّفة كما يلي : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب.أحسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بـ: المنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=\alpha$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $y=0$ حيث : $\alpha<\frac{1}{2}$. أحسب نهاية $S(\alpha)$ لما α تؤول إلى $-\infty$.

4. لتكن المعادلة التفاضلية : $2y-y'=2e^{2x}$ ....(1)

أ. تحقق أن : الدالة f حل للمعادلة (1).

ب. بين أن: $(f+g)$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان g حل للمعادلة : $2y-y'=0$ ....(2)

حل المعادلة (2) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

5. نرمز بـ: $f^{(n)}$ المشتقة من الرتبة n للدالة f حيث: n عدد طبيعي غير معدوم

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

ب. استنتج دالة أصلية للدالة u على $\mathbb{R}$: $u(x)=(-2017-2x)e^{2x}$