**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**ثانويات:** حنكة علي– خوازم الطاهر – محمد العيد آل خليفة– شعباني عباس – هواري بومدين – حساني عبد الكريم– داسي خليفة – البياضة الجديدة– 08 ماي – سيدي عون

**امتحان البكالوريا التجريبية**

**دورة** : ماي 2017

**الشعبة:** رياضيات

**اختبار في مادة :الرياضيات** — **المدة: 04 سا و30 د**

**على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :**

## الموضوع الأوّل

### التمرين الأول: (04 نقاط )

الفضاء مزوّد بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2;0;0)$ , $B(0;-2;0)$ ، $C(0;0;-2)$ و $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

**1)** أ– بيّن أنّ النقط $A$, $B$ و $C$ تعيّن مستويا نرمز له بـ$(Q)$.

ب– بيّن أنّ: $x+y+z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$.

**2)** $(P)$ المستوي الذي يشمل النقطة $I$ و يعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$ .

أ– أُكتب معادلة للمستوي $(P)$. ماذا يمثل المستوي $(P)$؟

**ب–** بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(d)$ يشمل النقطة $C$ وأن $\vec{u}(1;1;-2)$ هو شعاع توجيه له. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ .

**3)** بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان، ثم استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(d)$.

**4)** أ– تحقق أنّ الرباعي $OAIC$ هو رباعي الوجوه .

**ب–** احسب المسافة $d(O;(Q))$, ثم احسب حجم الرباعي الوجوه $OAIC$.

### التمرين الثاني: (04 نقاط )

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة: $(1)\ldots 5x-6y=3$ .

**1)** أ– أثبت أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(1)$ ، فإنّ $x$ مضاعف للعدد $3$.

**ب–** استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة $(1)$ .

**ج–** حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$ ، ثم عيّن الأعداد الصحيحة $a$ بحيث: $\begin{cases} a\equiv -1[6] \\ a\equiv -4[5] \end{cases}$ .

**2)** أ– أُدرس، حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي القسمة الإقليدية للعدد $2^n$ على $9$.

**ب–** بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$حلا للمعادلة $(1)$ , فإنّ العدد $2^{x-1}-2^{6y}+3\times 2^{2017}$ مضاعف للعدد $9$

**3)** $A$ و $B$ عددان طبيعيان حيث: $A$ يُكتب $\overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذي الأساس $3$ و $B$ يُكتب $\overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس $5$.

– عيّن $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الثنائية $(A;B)$ حلا للمعادلة $(1)$ .

**التمرين الثالث: (05 نقاط )**

I) حِلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $\left(\overline{z}-\sqrt{3}-i\right)\left(z^2-2-2\sqrt{3}i\right)=0$.

II) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ .

**1)** أ- أُكتب كلا من $z_A$, $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي.

**ب-** تحقق أنّ: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2017}.\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1438}.\left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962}=-i$.

**2)** ليكن $S$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$، النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث: $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}+3i$.

أ- عيّن طبيعة التحويل $S$ و عناصره المميزة.

**ب-** استنتج طبيعة التحويل $H$ حيث: $H=S\circ S\circ S$ و أعْطِ عناصره المميزة.

**3)** أ- بيّن أنّ $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث: $\left(z-z_A\right)\left(\overline{z}-z_B\right)=z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها $r$.

**ب-** بيّن أنّ النقطة $O$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ و أنّ $C$ لا تنتمي إلى $(\Gamma)$.

**جـ-** أُكتب معادلة للمجموعة $(\Gamma')$، صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $H$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط )**

I) لتكن الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1)** أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

**ب-** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

**2)** ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

**3)** عيّن فاصلة نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

**4)** احسب $f(1)$، ثم أُرسم المنحنى $(C_f)$ على المجال $]-\infty;1]$.

**5)** ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$ على المجال $]-\infty;1]$.

**6)** أ- عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون الدالة $x\mapsto(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب− احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\lambda$ و $x=\frac{1}{2}$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي أصغر تماما من $\frac{1}{2}$.

ج− احسب $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S(\lambda)$.

II) $n$ عدد طبيعي غير معدوم.

نسمي $f'=f^{(1)}$ ، $f''=f^{(2)}$ ،$f'''=f^{(3)}$، ... و $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$.

**1)** برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

**2)** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $(C_{f^{(n)}})$ هو المنحنى الممثل للدالة $f^{(n)}$ ( $f^{(n)}$ هي الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ ) و الذي يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

أ− احسب بدلالة $n$، كلا من $x_n$ و $y_n$.

ب− بيّن أنّ $(x_n)$ متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها $r$ و حدّها الأول. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

ج− بيّن أنّ $(y_n)$ متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها $q$ و حدّها الأول. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

**انتهى الموضوع الأول**

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (04 نقاط )

في الفضاء المزّود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

نعتبر $(P)$ المستوي ذو المعادلة: $2x+y-2z+4=0$.

و لتكن النقط $A(3;2;6)$, $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

**1)** أ- أثبت أنّ النقط $A$, $B$ و $C$ تعيّن مستويا، ثم تحقق أنّ هذا المستوي هو $(P)$.

**ب-** بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم.

**2)** أ- أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $O$ و العمودي على المستوي $(P)$.

**ب-** استنتج احداثيات النقطة $H$، المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستوي $(P)$. احسب $OH$.

**جـ-** احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

**3)** لتكن النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$ و $I$ مركز ثقل المثلث $ABC$.

- بيّن أنّ النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيم $(OI)$ و احسب بعد النقطة $G$ عن المستوي $(P)$.

**4)** لتكن $(S)$, مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$.

أ- حدّد طبيعة المجموعة $(S)$ و عناصرها المميزة.

**ب-** ما طبيعة مجموعة النقط، تقاطع $(S)$ و $(P)$ ؟ برّر اجابتك.

## التمرين الثاني: (04 نقاط )

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=-1+3i$ و $z_C=-3+i$.

**1)** أ- علّم النقط $A$، $B$ و $C$.

**ب-** $h$ هو التحاكي الذي نسبته $2$ و يُحوّل $A$ إلى $C$. عين $z_w$ لاحقة النقطة $w$ مركز التحاكي $h$.

**2)** أ- نضع: $L=\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$. احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $L$، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**ب-** عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ التي من أجلها يكون $L^n$ تخيليا صرفا.

**3)** لتكن النقطة $D$ بحيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ و $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

أ- بيّن أنّ النقطة $D$ مرجح النقط $A$، $B$ و $C$ مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها.

**ب-** عيّن $z_D$ لاحقة $D$ و $z_I$ لاحقة $I$.

**جـ-** عيّن طبيعة $(E)$، مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

ثم أنشئها.

**4)** نعتبر النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E = 1+5i$.

أ– أُكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$، ثم استنتج أنّ $DE = 2AI$ و $(DE)$ يعامد $(AI)$.

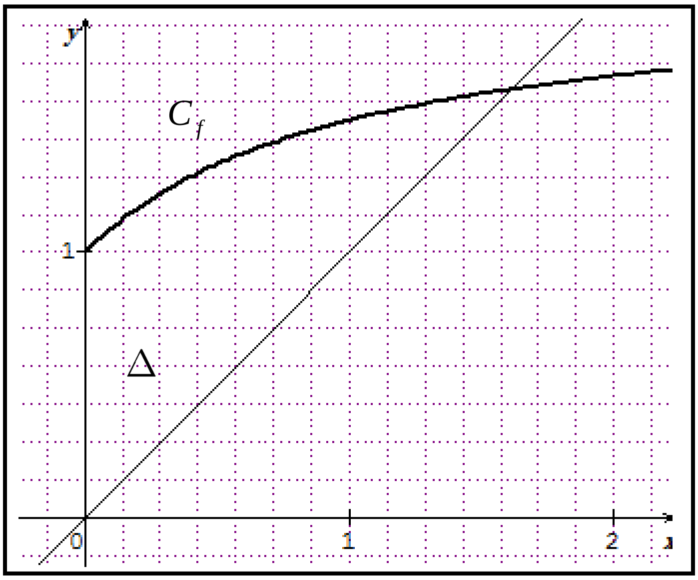
ب– عيّن المركز، النسبة و زاوية للتشابه المباشر $S$ الذي يُحوّل $D$ إلى $I$ و يُحوّل $E$ إلى $A$.

جـ– استنتج $(\Gamma')$، صورة الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $D$ و تشمل $E$ بالتشابه المباشر $S$.

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $I = [0;+\infty[$ بِـ : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بِـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$.




في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، مثّلنا $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$. (أُنظر الشكل المقابل).

**1)** أ– مثّل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ و $v_0$، $v_1$، $v_2$ دون حسابها و مُبرزا خطوط الرسم.

ب– أعْطِ تخمينا حول اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$.

**2)** أ– بقراءة بيانية، حدّد اتجاه تغيّر $f$ على المجال $[0\ ;\ 2]$.

ب– برهن بالتراجع، أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: " $1 \le u_n \le 2$ " و " $1 \le v_n \le 2$ ".

جـ– أُدرس اتجاه تغيّر كل $(u_n)$ و $(v_n)$.

**3)** أ– أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب– استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

جـ– أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج أنّ: $\lim_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$.

د– بيّن أنّ: $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

**1)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$.

**2)** ادرس اتجاه تغيّر $g$ على المجال $]0\,;\,+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

**3)** استنتج إشارة $g(x)$ على $]0\,;\,+\infty[$، ثم بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0\,;\,+\infty[$، $g\left(1+\dfrac{2}{x}\right)>0$.

II) $f$ دالة عددية معرّفة على المجال $[0\,;\,+\infty[$ بـ: $f(x)=x-3+x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ و $f(0)=-3$.

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j})$.

**1)** بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة على يمين 0.

**2)** أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=2$. ( يمكن استعمال النتيجة: $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$).

ب- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

جـ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**3)** أ- بيّن أنّ $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;\,+\infty[$ و أنّ: $f'(x)=g\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$.

ب- استنتج اتّجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[0\,;\,+\infty[$, ثم تحقّق أنّ: $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

د- أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$. ( نقبل أنّ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ على المجال $[0\,;\,+\infty[$ ).

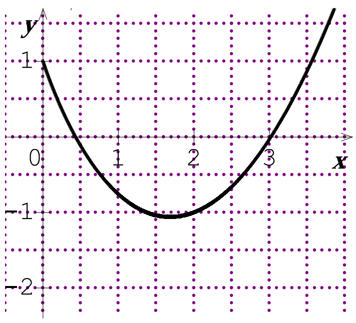
**4)** $F$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0\,;\,+\infty[$ بـ: $F(x)=\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

وليكن $(C_F)$ تمثيلها البياني في المستوي السابق.

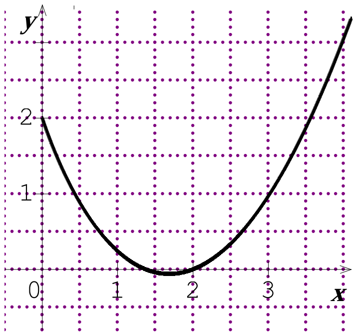
أ- أُدرس اتجاه تغيّر الدالة $F$ ( دون حساب عبارة $F(x)$).

ب- عيّن معادلة لـ$(T)$ , مماس المنحنى $(C_F)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$.

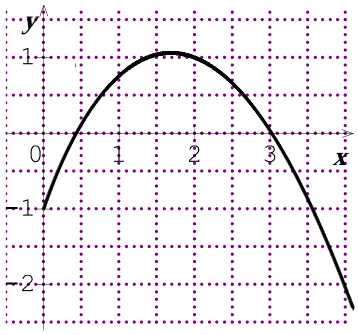
جـ- من بين المنحنيات الثلاث التالية **(1)**, **(2)** و **(3)**، عيّن المنحنى $(C_F)$ مع التبرير.



**المنحنى (1)**



**المنحنى (2)**



**المنحنى(3)**

**انتهى الموضوع الثاني**