الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مـــديرية التربية بولاية تمنراست

ثانويات تمنراست المقاطعة 29 — المـوسم الدراسي : 2017/2016

امتـــــــحان الثلاثي الثاني — الشعبـــــــة : الثالثة رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات — المـــــــــدة : 4ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط) :

نعتبر في المجموعة المعادلة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-6y=3$..........(1)

1) أثبت انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3

2) استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

3) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

4) a و b ثم عددان طبيعيان حيث $a=\overline{1\sim 0\sim 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\sim\ \ 0\sim}$ في النظام ذو الاساس 5.
عين ~ و حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (1) ثم أكتب العددان a و b في النظام العشري .

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(-2\ ;\ -1;3)$, $B(1;3;5)$; $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$ و $D(2;-2;-3)$ $E(1\ ;\ -1;2)$, $F(1;-1;1)$ و المستقيم (Δ) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي

$$\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ y=-\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z=-1+\ln\left(e^2t\right) \end{cases} \quad : t\in\left]0;+\infty\right[$$

1) أ- بين أن النقط A ; B ; C تعين مستويا (ABC) .

ب-تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظيمي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له .

2) أ- أوجد $\vec{u}$ أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) و إحداثيات نقطة منه .

ب- لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) أوجد EM^2 بدلالة t

ج- أوجد أصغر قيمة EM^2 ثم استنتج المسافة بين النقطة E و المستقيم (Δ) .

د- استنتج إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ)

و- أكتب معادلةسطح الكرة (S) التي مركزها E و يمس المستقيم (Δ)

3) أ- بين أن المثلث ABC قائم في A و أحسب مساحته

ب-أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثالث (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta): z^2+4z\cos\theta+4=0$ حيث $\theta\in\left]0;\pi\right[$.

1) بدون حل للمعادلة (E_θ) أثبت أنه إذا كان z_0 حل للمعادلة (E_θ) فإن $\overline{z_0}$ هو كذلك حلا لها .

2) نضع : $z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta$ و $z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta$.

أ- تحقق أن z_1 , z_2 هما حلي المعادلة (E_θ) .

ب- أكتب z_1 , z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

ج-استنتج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلث قائم في O حيث M_2 و M_1 نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 .

د-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لما θ تمسح $\mathbb{R}$ حيث $z=2e^{i\theta}+3$

3) نعتبر $\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و النقط A , B , C لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 و 2

أ- التحقق أن $\frac{z_2-2}{z_1-2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC .

4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z'=iz+3$.

أ-عين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة .

ب-عين (Γ') صورة الدائرة (Γ_1) تحقق أن (Γ) جزء من (Γ') .

التمرين الرابع (7 نقاط) :

الجزء الأول : لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ : $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}+1$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج أنه من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $g(x)>0$

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1 : & x>0 \\ f(x)=(1-x)\,e^{x} & : x\leq 0 \end{cases}$$

و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ-بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب-أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2) بين ان f مستمرة عند 0 .

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 و على يسار 0 ثم فسر النتيجتين هندسيا .

4) بين أن $\begin{cases} f'(x)=g(x) : & x\in\left]0;+\infty\right[\\ f'(x)=-xe^{x} & : x\left]-\infty;0\right[\end{cases}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

5) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ ثم أنشئ المنحني (C_f)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4 نقاط) :

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$
2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ عدد طبيعي غير معدوم
3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3 - 11n;\, n+3\right) = PGCD\left(48;\, n+3\right)$
4) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 ثم أستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ طبيعيا

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$ نعتبر المجموعة (S) النقط $M(x;y;z)$ حيث $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$.

1) بين أن (S)سطح كرة يطلب تعيين مركزه و نصف قطره .
2) نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة $2x - 2y + z - 2 = 0$.
   أ- حدد الوضع النسبي للمستوي (Q) وسطح كرة (S).
   ب- بين أن نقط تقاطع المستوي (Q) و لسطح الكرة (S) هو دائرة يطلب تحدد مركزها و نصف قطرها .
3) نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة $2mx + (1-2m)y + mz + 1 - 2m = 0$ حيث m عدد حقيقي .
   أ- ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0;-1;0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1\,;\,0;-2)$.بين أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_m) .
   ب- حدد الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها المستوي (P_m) مماسا لسطح الكرة (S).
   ج- حدد الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها المستوي (P_m) عمودي على المستوي (Q).

التمرين الثالث (5 نقاط) :

1) حل في مجوعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $4z^2 - 2z + 1 = 0$
2) ليكن العدد المركب حيث $z = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   أ- عين شكلا مثلثيا لكل من العددين z و $\bar{z}$.
   ب- ليكن العدد المركب L_k حيث $L_k = \left(\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي
   بين أن $L_k = \dfrac{1}{2^{k-1}} i \sin\left(\dfrac{k®}{3}\right)$ ثم استنتج قيمة العدد L_{2016}
3) نعتبر في المستوي الركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{u}\,; \vec{v}\right)$

النقطتان $A\ ;B$ ذات اللاحقتان $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب و C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{®}{3}$

أ- عين z_C لاحقة النقطة C

ب- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين الرابع (7 نقاط) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1 أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة g .

2) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g(x)\geq 0$ (لاحظ أن $g(0)=0$) ثم أستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geq 1$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ مفسراً النتيجتان بيانيا .

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{(1+x)\,e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2}$ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

4) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ثم أستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط) :

1) إثبات انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3

$5x-6y=3$ يكافئ $5x=3(y+1)$ بما ان العددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوص العدد x مضاعف للعدد 3

2) لستنتاج الحل خاصا للمعادلة (1) لدينا $5(-1)-6(-1)=1$ بالضرب في 3 نجد $5(-3)-6(-3)=3$ و منه $(-3;-3)$ حل خاص للمعادلة

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) مماسبق نجد $\begin{cases}5x-6y=3\\5(-3)-6(-3)=3\end{cases}$ بالطرح نجد $5(x+3)=6(y+3)$ بما ان العددان 6 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوص 6 قاسم للعدد $(x+3)$ أي ان $x+3=6k\ :\ k\in Z$ و منه $x=-3+6k\ :\ k\in Z$

بالتعويض في (1) نجد $y=-3+5k\ :\ k\in Z$ مجموعة الحلول هي $S'=\{(-3+6k;-3+5k)\ :\ k\in Z\}$

3) لستنتج حلول الجملة S : $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=-1+6m\\x\equiv -4+5n\end{cases}$ و منه $-4+5n=-1+6m$ أي $5n-6m=3$ مما سبق نجد $\begin{cases}n=-3+6k\\m=-3+5k\end{cases} : k\in Z$ و منه $x=30k-19\ : k\in Z$.

4) a و b عددان طبيعيان حيث $a=\overline{1\sim0\sim00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\sim\ \ 0\sim}$ في النظام ذو الاساس 5.

تعيين $\sim$ و حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (1)

$a=\overline{1\sim0\sim00}^{3}$ يكافئ $a=3^5+3^4\sim+3^2\sim=243+90\sim$ و $0<\sim<3$ و $b=\overline{\sim\ \ 0\sim}^{5}=5^3\sim+5^2\ \ +\sim=126\sim+25$

و $0<\ \ <5$ و لدينا $(a;b)$ حلا للمعادلة (1) يعني $5a-6b=3$ بالتعويض نجد $5(243+90\sim)-6(126\sim+25\ \ )=3$

و منه نجد $5(243+90\sim)-6(126\sim+25\ \ )=3$ أي ان $-306\sim-150\ \ =-1212$ أي ان $51\sim+25\ \ =202$

لما $\sim=0$ نجد $=\frac{202}{25}$ مرفوض و لما $\sim=1$ نجد $=\frac{151}{25}$ مرفوض و لما $\sim=2$ نجد $=4$ مقبول

و منه $a=243+90(2)=423$ و $b=126(2)+25(4)=352$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقاط $A(-2\ ;\ -1;3)$, $B(1;3;5)$; $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$ و $D(2;-2;-3)$ $E(1\ ;\ -1;2)$, $F(1;-1;1)$ و المستقيم (Δ) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي

$$\begin{cases}x=1-\ln(t)\\y=-\ln\left(\frac{e}{t}\right)\\z=-1+\ln(e^2t)\end{cases} : t\in\ ]0;+\infty[$$

4) أ- إثبات أن النقاط $A\ ;\ B\ ;C$ تعين مستويا (ABC) لدينا $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$; $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$ بما أن $\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)}\neq\frac{3}{4}$ فإن النقاط

$A\ ;\ B\ ;C$ تعين مستويا

ب-التحقق أن الشعاع $\overrightarrow{n}(2;-2;1)$ ناظيمي للمستوي (ABC) نحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}=6-8+2=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}=8-1-7=0$ إذن محققة

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $2x-2y+z=1$

5) أ- ايجاد $\overrightarrow{u}$ أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي هو $]0;+\infty[\ : t\in$ $\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ y=-\ln\left(\dfrac{e}{t}\right) \\ z=-1+\ln(e^2t) \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ y=-1+\ln(t) : t\in]0;+\infty[\\ z=1+\ln(t) \end{cases}$ بوضع $k=\ln(t)$ نجد $\begin{cases} x=1-k \\ y=-1+k : k\in R \\ z=1+k \end{cases}$ و منه $\overrightarrow{u}(-1;1;1)$

نقطة من (Δ) هي $L(1;-1;1)$

ب-لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) ايجاد EM^2 بدلالة t

$$EM^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(-\ln(t))^2+(\ln(t))^2+(\ln(t)-1)^2=3[\ln(t)]^2-2\ln(t)+1$$

ج- ايجاد أصغر قيمة EM^2 نضع $EM^2=f(t)$ و ندرس اتجاه تغير الدالة f نجد أن $f'(t)=\dfrac{2(3\ln(t)-1)}{t}$ تنعدم

عند $t=e^{\frac{1}{3}}$; f' وسالبة على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ و منه f متناقصة على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ و متزايدة على المجال

$\left]e^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$ إذن أصغر قيمة تصلها EM^2 عندما $t=e^{\frac{1}{3}}$ أي $EM^2=\dfrac{2}{3}$ و منه المسافة بين النقطة E و المستقيم (Δ)

هي $\dfrac{2}{3}$.

د- استنتاج إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ) نعوض في التمثيل الوسيطي $t=e^{\frac{1}{3}}$ هي

$H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

و- كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E و يمس المستقيم (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\dfrac{2}{3}$ يكافئ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+\dfrac{16}{3}=0$

6) أ- تبيين أن المثلث ABC قائم في A لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12+2-14=0$ ومنه محققة

حساب مساحة المثلث ABC $\quad S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times AC=\dfrac{\sqrt{9+16+4}\times\sqrt{16+\frac{1}{4}+49}}{2}=\dfrac{29\times 3}{4}=\dfrac{87}{4}$

ب-حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ نحسب $d(ABC;D)=\dfrac{|2(2)-2(-2)+(-3)-1|}{3}=\dfrac{4}{3}$

و منه الحجم هو $v_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.d(ABC;D)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{87}{4}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{87}{9}$.

التمرين الثالث (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta):\ z^2+4z\cos\theta+4=0$ حيث $\theta\in]0;\pi[$.

1) **اثبات** أنه إذا كان α **حل للمعادلة** (E_θ) **فإن** $\alpha^2+4\alpha\cos\theta+4=0$ يكافئ $\overline{\alpha^2+4\alpha\cos\theta+4=0}$ **أي ان** $\overline{\alpha}^2+4\overline{\alpha}\cos\theta+4=0$ و منه $\overline{\alpha}$ هو كذالك حل **لهذه المعادلة .**

2) **نضع :** $z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta$ **و** $z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta$.

أ-التحقق أن z_1 **حل المعادلة** (E_θ) يعني

أي ان $(-2\cos\theta+2i\sin\theta)^2+4(-2\cos\theta+2i\sin\theta)\cos\theta+4=0$

$4\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta-2i\sin\theta.\cos\theta\right)+4\left(-2\cos^2\theta+2i\sin\theta.\cos\theta\right)+4=0$

$4\left(-\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+4=0$ **بما ان** $\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=1$ **فإن** $-4+4=0$ **بما أن** z_1 **حل المعادلة** (E_θ) **فإن** $\overline{z_1}$ حل لهذه **المعادلة أي** $\overline{z_1}=z_2$ **حل.**

ب-الكتابة على الشكل الأسي $z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta=2(-\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right)=2e^{i(\pi-\theta)}$ **و**

$z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta=2(-\cos\theta-i\sin\theta)=2\left(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)\right)=2e^{i(\pi+\theta)}$

$z_1=2e^{i(\pi-\theta)}$, $z_2=2e^{i(\theta+\pi)}$ **و** $\dfrac{z_1}{z_2}=e^{-2i\theta}$.

ج-لستنتاج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 **مثلث قائم في** O **يعني** $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ و لدينا

$\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)=\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=-\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=2\theta$ **نُطابق نجد** $2\theta\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ و منه $2\theta=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\ :k\in\mathbb{Z}$ **إذن**

$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\ :k\in\mathbb{Z}$.

د-تعيين (Γ) **مجموعة النقط** M **من المستوي ذات اللاحقة** z حيث $z=2e^{i\theta}+3$ هي دائرة مركزها ذو اللاحقة 3 **و** نصف قطرها 2 .

3) **نعتبر** $\theta\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ **و النقط** A , B , C لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 **و** 2

أ- التحقق أن $\dfrac{z_2-2}{z_1-2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا :

$$\frac{z_2-2}{z_1-2}=\frac{-2\cos\theta-2i\sin\theta-2}{-2\cos\theta+2i\sin\theta-2}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}=e^{i\frac{2\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و منه المثلث ABC متقايس الاضلاع .

ب- تعيين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC **بما أن** $|z_2|=|z_1|=2$ **فإن النقط** A , B , C **تنتمي إلى الدائرة ذات المركز** O **و نصف القطر** 2

4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ **النقطة** $M'(z')$ حيث $z'=iz+3$.

تعيين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة **بما أن** $|i|=1$ فهو دوران زاويته $\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$ **و مركزه ذو اللاحقة**

$z_0=\dfrac{3}{1-i}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

الجزء الأول : لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{1}{x+1}+1$

1) **دراسة** تغيرات الدالة g لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}+1\right]=1$ **و** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$

المشتقة $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-(x+1)^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{-x^2-x-1}{x(x+1)^2}$ اشارتها من اشارة $-x^2-x-1$

مميزها سالب فهي سالبة إذن g **متناقصة على** $]0;+\infty[$ جدول تغيراتها

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 1

2) من جدول تغيراتها **نستنتج** أنه من أجل كل x **من** $]0;+\infty[$: $g(x)>0$ **لأن** 1 حاد من الأسفل لهذه الدالة .

الجزء الثاني : **لتكن** f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x **المعرفة على** $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1 : \; x>0 \\ f(x)=(1-x)\,e^{x} \quad : x\le 0\end{cases}$ و

(C_f) **المنحني الممثل للدالة** f **في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) **أ-تبيين أن** : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$: بتغيير المتغير نضع $t=\dfrac{1}{x}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(t)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t}=1 \;.$$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1\right]=+\infty$

ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^{x}=0$ **و** منه $y=0$ معادلة المستقيم المقارب العمودي .

2) **تبيين ان** f **مستمرة عند** 0 **بما أن**

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x\ln(x+1)-x\ln(x)+x+1\right]=1=f(0)$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1\right]$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=$ **لأن** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[-x\ln(x)\right]=0$

التزايد المقارن و منه f **مستمرة عند** 0

3) **دراسة** قابلية اشتقاق f **الدالة على** يمين 0 و على يسار 0

$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[\ln\left(\dfrac{h+1}{h}\right)+1\right]=+\infty$ و منه f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و منحناها يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب.

$\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{(1+h)e^{h}-1}{h}\right]=\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\left[e^{h}+\dfrac{e^{h}-1}{h}\right]=2$ **لان** $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{e^{h}-1}{h}\right]=1$ و منه f **قابلة للاشتقاق** على اليسار إذاً منحناها يقبل مماسا للمنحني على يسار النقطة ذات الفاصلة 0 و منه النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة زاوية .

4) تبيين أن $\begin{cases} f'(x)=g(x) : & x\in]0;+\infty[\\ f'(x)=-xe^{x} & : x]-\infty;0[\end{cases}$ **بما** f **مستمرة على المجال** $]0;+\infty[$ **وقابلة للاشتقاق على** هذا المجال و

$f'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-x.\frac{1}{x(x+1)}+1=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}=g(x)$ وهي موجبة على هذا المجال و منه f متزايدة على هذا المجال

f **قابلة للاشتقاق على المجل** $]-\infty;0[$ **و** $f'(x)=-e^{x}+(1-x)e^{x}=-xe^{x}$ هي موجبة على هذا المجال و منه f متزايدة على هذا المجال

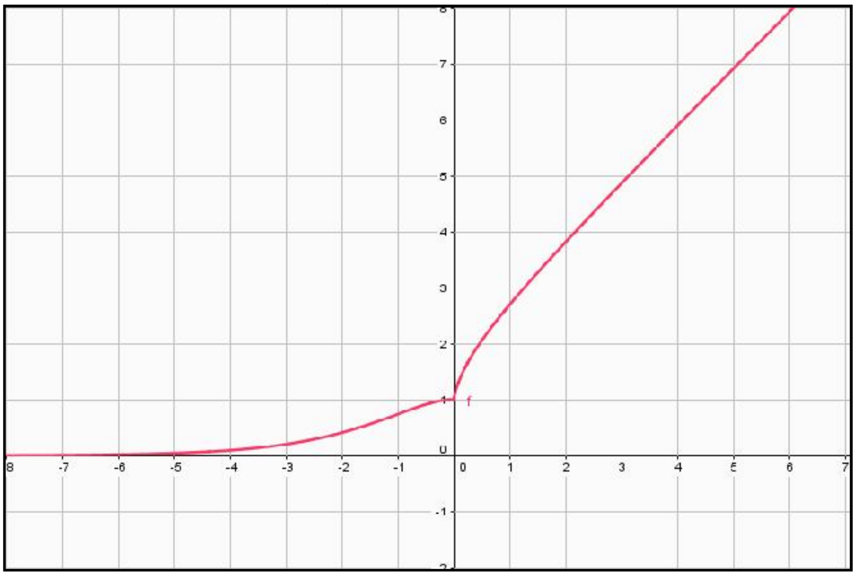
جدول تغيراتها

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	0 ↗		$+\infty$

5) تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ **مقارب للمنحني** (C_f) **بجوار** $+\infty$ لدينا

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right]=1-1=0$ و هو المطلوب

أنشاء المنحني (C_f)



انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4 نقاط) :

1) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

لدينا $3n^3-11n+48=(n+3)(3n^2-9n+16)$ محققة .

2) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم لدينا

نحسب المميز $\Delta=81-4\times16\times3=-111$ و منه $(3n^2-9n+16)$ عدد صحيح موجب تماما فهو عدد طبيعي إذاً جداء عددين طبيعيان هو عدد طبيعي .

3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 : $PGCD(3n^3-11n\ ;\ n+3)=PGCD(48;\ n+3)$

نضع $PGCD(3n^3-11n\ ;\ n+3)=d$ و $PGCD(48;\ n+3)=d'$

لدينا d قاسم للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ فهو قاسم للعدد $48=(n+3)(3n^2-9n+16)-(3n^3-11n)$ و منه d قاسم 48

إذا d قاسم للعدد d' ......(1)

لدينا d' قاسم للعددين 48 و $n+3$ فهو قاسم للعدد $(3n^3-11n)=(n+3)(3n^2-9n+16)-48$ و منه d' قاسم $(3n^3-11n)$ إذا d' قاسم للعدد d ....(2) من (1) و (2) نجد أن $d=d'$

4) تعيين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 لدينا $48=2^4\times3$ عدد القواسم هو $5\times2=10$ مجموعة القواسم هي $D_{48}=\{1;2;3;4;6;12;16;24;48\}$

لدينا $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}=3n^2-9n+16-\dfrac{48}{n+3}$ يكون $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عدد طبيعي يعني ان $(n+3)$ قاسم للعدد 48 و $3n^3+11n$ عدد موجب و منه نجد قيم n هي $45\ ;\ 21\ ;\ 13\ ;\ 9\ ;\ 3\ ;\ 0$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المجموعة (s) النقط $M(x;y;z)$ حيث $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$.

1) إثبات أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزه و نصف قطره لدينا $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$ يكافئ $x^2+(y-2)^2+z^2=9$ و هي معادلة سطح كرة مركزه $\mu(0;2;0)$ و نصف قطره $R=3$.

2) نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة $2x-2y+z-2=0$.

أ- تحديد الوضع النسبي للمستوي (Q) وسطح كرة (S) نحسب المسافة بين مركز (S) و المستوي (Q) لدينا

$d(Q;\mu)=\dfrac{|2(0)-2(2)+0-2|}{\sqrt{4+4+1}}=2$ بما أنها أقل من نصف قطر سطح الكرة R فإن (S) و (Q) متقاطعان .

ب- إثبات أن نقط تقاطع المستوي (Q) و السطح الكرة (S) هو دائرة مما سبق نستنتج ان تقاطعهما دائرة نصف قطرها r

بتطبيق نظرية فيثاغوس نجد $R^2=r^2+[d(Q;\mu)]^2$ و منه $r=\sqrt{R^2-[d(Q;\mu)]^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

3) نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$ حيث m عدد حقيقي .

أ- ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0;-1;0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1\ ;\ 0;-2)$.

تبيين أن المستقيم (Δ) **محتوى في المستوي** (P_m) .لدينا المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي هو

$(\Delta):\begin{cases} x = t \\ y = -1 \quad :t \in R \\ z = -2t \end{cases}$ نعوض في المعادلة الديكارتية نجد $2mt - (1-2m) - 2mt + 1 - 2m = 0$ **محققة**

ب- **تحديد** الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها المستوي (P_m) **مماسا للسطح الكرة** (S) **أي أن**

$d(P_m;\text{µ}) = \frac{|2m(0)+(1-2m)(2)+m(0)+1-2m|}{\sqrt{4m^2+(1-2m)^2+m^2}} = \frac{|3-6m|}{\sqrt{9m^2-4m+1}} = 3$ يكافئ $\frac{|3-6m|}{\sqrt{9m^2-4m+1}} = 3$

بالتربيع و ضرب الطرفين في الوسطين نجد $9 - 36m + 36m^2 = 81m^2 - 36m + 9$ و منه $36m^2 = 81m^2$

و منه $m = 0$

ج- **تحديد** الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها المستوي (P_m) **عمودي على المستوي** (Q)لدينا شعاع ناظيمي(P_m) هو

$\overrightarrow{v_m}(2m;1-2m;m)$ و شعاع ناظيمي لي (Q) هو $\overrightarrow{n_1}(2;-2;1)$

المستوي (P_m) **عمودي على المستوي** (Q)يعني أن $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{v_m} = 0$ **و** لدينا $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{v_m} = 4m - 2 + 4m + m = 9m - 2$ **و**

منه نطابق $9m - 2 = 0$ و منه $m = \frac{2}{9}$.

<u>التمرين الثالث (5 نقاط) :</u>

1) **حل في مجوعة الاعداد المركبة** $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $4z^2 - 2z + 1 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -12$ للمعادلة حلين متمايزين هما

$z_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ **و** $z_2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

2) ليكن العدد المركب حيث $z = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

أ- **تعيين الشكل مثلثي** لكل من العددين z **و** $\bar{z}$: $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\text{®}}{3} + i\sin\frac{\text{®}}{3}\right)$ **و** $\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\text{®}}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\text{®}}{3}\right)\right)$.

ب- ليكن العدد المركب L_k حيث $L_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي

تبيين أن $L_k = \frac{1}{2^{k-1}}i\sin\left(\frac{k\text{®}}{3}\right)$ لدينا

$$L_k = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\text{®}}{3}}\right)^k - \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\text{®}}{3}}\right)^k = \frac{1}{2^k}e^{i\frac{\text{®}k}{3}} - \frac{1}{2^k}e^{-i\frac{\text{®}k}{3}} = \frac{1}{2^k}\left(2i\sin\left(\frac{\text{®}k}{3}\right)\right) = \frac{1}{2^{k-1}}i\sin\left(\frac{\text{®}k}{3}\right)$$

و منه $L_{2016} = \frac{1}{2^{2015}}i\sin\left(\frac{2016\text{®}}{3}\right) = \frac{1}{2^{2017}}i\sin(672\text{®}) = 0$

3) **نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس** $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ **النقطتان** A ;B ذات اللاحقتان

$z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ **و** $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ على الترتيب و C **صورة النقطة** B **بالدوران** R **الذي مركزه النقطة**

A و زاويته $\frac{\text{®}}{3}$

أ- **تعيين** z_C **لاحقة النقطة** C لدينا $R(B)=C$ **أي أن** $z_C - z_A = e^{i\frac{®}{3}}(z_B - z_A)$ و منه

$$z_C = e^{i\frac{®}{3}} z_B + \left(1 - e^{i\frac{®}{3}}\right) z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 + 2i\sqrt{3}\right) = 8$$

ب- تبيين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

لدينا $z_A - z_C = -6 + 2i\sqrt{3}$ **و** $z_B - z_C = -6 - 2i\sqrt{3}$ **و** $z_B - z_A = -4i\sqrt{3}$ و منه

$|z_A - z_C| = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ **و** $|z_B - z_C| = 4\sqrt{3}$ **و** $|z_B - z_A| = 4\sqrt{3}$ و منه محققة .

التمرين الرابع (7 نقاط) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g **المعرفة على** $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1 **حساب** $g'(x)$ لدينا $g'(x) = -e^{-x} + 1$ **تنعدم عند** 0 **و تكون موجبة على المجال** $]0;+\infty[$ **وسالبة على المجال** $]-\infty;0[$ و منه **الدالة** g متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ **و متناقصة على المجال** $]-\infty;0[$.

2 **تبيين أن من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$ مما سبق نجد أن الدالة تقبل قيمة حدية صغري هي $g(0) = 0$ و منه **من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$ **إذاً** $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ و منه $e^{-x} + x \geq 1$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x **والمعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ** : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **تبيين** أنه من أجل كل x **من** $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$: لدينا $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}} = \frac{x}{x + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ و منه

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0$ **و** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1$ المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ **مقارب أفقي للمنحنى** (C_f) جهة $+\infty$ **و** المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ **مقارب أفقي للمنحنى** (C_f) جهة $-\infty$

2) **تبيين** أنه من أجل **كل** x **من** $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(1+x)\, e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$

لدينا $f'(x) = \frac{x + e^{-x} - x(1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1+x)}{(x + e^{-x})^2}$ و اشارتها من إشارة $x + 1$ و منه فهي موجبة على المجال $]-1;+\infty[$ **وسالبة على المجال** $]-\infty;-1[$ إذاً الدالة متزايدة على المجال $]-1;+\infty[$ **و متناقصة على المجال** $]-\infty;-1]$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{-1}{-1+e}$	$\nearrow$	1

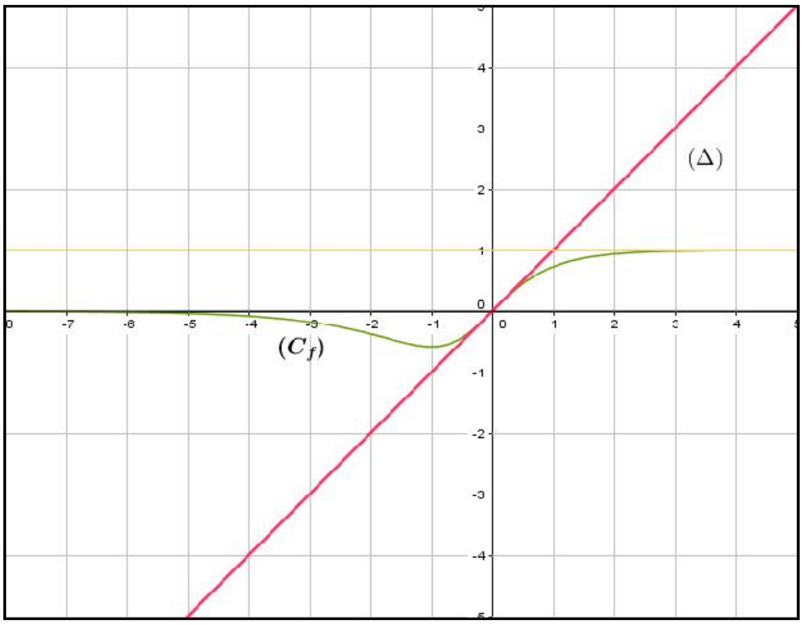
3) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم هي $y=x$

4) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$x-f(x)=x-\frac{x}{x+e^{-x}}=\frac{x^2+xe^{-x}-x}{x+e^{-x}}=\frac{x\left(x+e^{-x}-1\right)}{x+e^{-x}}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

مماسبق نجد أن $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ و اشاراتها من اشارة x ومنه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0]$ و يقع تحته على المجال $[0;+\infty[$

5) أنشاء (Δ) و (C_f) .



انتهى الموضوع الثاني