الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية بولاية تمنراست — الموسم الدراسي 2017 /2018

شعبتي : الثالثة الرياضيات و الثالثة التقني رياضي — المـــــــدة : 5400 ثانية .

الفرض المحروس الأول لثلاثي الثاني

التمرين الأول (12 نقطة) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\frac{1}{2}$.

3) تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ إن كانت الإجابة نعم عين نهايتها .

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$.

أ - أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

ب -أكتب v_n بدلالة n ثم أستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

ج-أحسب $\lim u_n$.

د-أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$.

التمرين الثاني (8 نقاط) :

نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة $5x-6y=3 ....(1)$

1) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3 .

2) أستنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في Z^2 المعادلة (1) .

3) استنتج حلول الجملة E : $\begin{cases} x\equiv -4[5] \\ x\equiv -1[6] \end{cases}$.

4) حلل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016 .

5) نضع $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$ عين العددين الطبيعيين a و b حيث أن $m^2-2d^2=2016$

تصحيح المفصل للفرض الأول لثلاثي الثاني شعبتي الثالثة الرياضيات و التقني رياضي

التمرين الأول(12 نقطة) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$.

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1}$. بتوحيد المقامات نجد $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$ محققة

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ لدينا $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ محققة

نفرض أن في $0 < u_n < \frac{1}{2}$ و لنبرهن أن $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

$0 < u_n < \frac{1}{2}$ نضرب في 2 نجد $0 < 2u_n < 1$ اي $1 < 2u_n + 1 < 2$ بالقلب $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1$ و منه $-1 < -\frac{1}{2u_n+1} < -\frac{1}{2}$

بإضافة 1 نجد $0 < 1 - \frac{1}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$ و منه $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

3) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n : . $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n+1}$

و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ و هو المطلوب

اتجاه تغير المتتالية (u_n) : بما ان $0 < u_n < \frac{1}{2}$ فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ عدد موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

بما المتتالية متقاربة نفرض أن نهايتها l أي أن $\lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n}{2u_n+1}$ أي أن $l = \frac{2l}{2l+1}$ يعني أن $2l^2 + l = 2l$ و منه

$2l^2 - l = 0$ إذن $\begin{cases} l = 0 \\ \text{أو} \\ l = +\frac{1}{2} \end{cases}$ بما أن $0 < u_n < \frac{1}{2}$ و متزايدة فإن $l = \frac{1}{2}$

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$.

أ - إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$ لدينا $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$ و منه

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1} \frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\frac{2u_n}{2u_n+1} - 1} = \frac{2\times 3^{n+1} u_n}{4u_n - 2u_n - 1} = \frac{2\times 3^{n+1} u_n}{2u_n - 1} = 6\frac{3^n u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$

ب -كتاب v_n بدلالة n : $v_0=\frac{u_0}{2u_0-1}=-\frac{1}{3}$ و منه $v_n=-\frac{6^n}{3}$

أستنتاج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ لدينا $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ و منه $v_n(2u_n-1)=3^n u_n$ أي إن

$u_n(2v_n-3^n)=v_n$ و منه $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$ بالتعويض

$$u_n=\frac{\left(-\frac{6^n}{3}\right)}{2\left(-\frac{6^n}{3}\right)-3^n}=\frac{-6^n}{-2\times6^n-3^{n+1}}=\frac{3^n\times2^n}{2\times3^n\times2^n+3^n\times3}=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$$

ج-حساب $\lim u_n$: $\lim u_n=\lim\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$

د-حساب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$ لدينا $\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=2+\frac{3}{2^n}$

و منه $S_n=\left(2+\frac{1}{2^0}\right)+\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)...+\left(2+\frac{1}{2^n}\right)$ أي إن $S_n=2(n+1)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}\right)$ و منه

$S_n=2(n+1)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$ أي ان $S_n=2(n+1)-2\left[\frac{1}{2^{n+1}}-1\right]$

التمرين الثاني (8 نقاط) :

نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة $5x-6y=3........(1)$

1) إثبلت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3 لدينا (1) تكافئ $5x=3(2y+1)$ يكافئ $5x\equiv0[3]$ بما أن 3 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص فإن $x\equiv0[3]$ أي أن x مضاعف للعدد 3

2) استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) $(3;2)$

حل في Z^2 المعادلة (1) : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ بالطرح نجد $5(x-3)=6(y-2)$ بما أن 6 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوص نجد أن $k\in Z$: $\begin{cases}x=6k+3\\y=5k+2\end{cases}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{(6k+3;5k+2):k\in Z\}$.

3) استنتج حلول الجملة E : $\begin{cases}x\equiv-4[5]\\x\equiv-1[6]\end{cases}$ يعني أن $\begin{cases}x=5\alpha-4\\x=6\beta-1\end{cases}$ أي أن $5\alpha-4=6\beta-1$ و منه $5\alpha-6\beta=3$ و هي تكافئ المعادلة (1) من ما سبق وجدنا أن $k\in Z$: $\begin{cases}\alpha=6k+3\\\beta=5k+2\end{cases}$ و منه $x=5(6k+3)-4$ أي أن

$x=30k+11:k\in Z$

4) تحليل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية $2016=2^5\times3^2\times7$

استنتاج الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016 بما أن $2016=\left(2^2\times 3\right)^2\times 2\times 7$ القواسم المطلوبة هي قواسم $2^2\times 3$ و هي 1 و 3 و 2 و 4 و 6 و 12 .

5) نضع $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$

تعيين العددين الطبيعيين a و b حيث أن $m^2-2d^2=2016$ بما أن d قاسم للعدد m فإن d^2 قاسم للعدد m^2 و منه d^2 قاسم للعدد 2016

لما $d=1$ فإن $m^2=2018$ بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة

لما $d=2$ فإن $m^2=2024$ بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة

لما $d=3$ فإن $m^2=2034$ بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة

لما $d=4$ فإن $m^2=2048$ بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة

لما $d=6$ فإن $m^2=2088$ بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة

لما $d=12$ فإن $m^2=2304$ مقبول و منه $m=48$ أي أن $ab=12\times 48=576$ بوضع $\begin{cases} a=12a' \\ b=12b' \end{cases}$ حيث العددان a' و b' أوليان فيما بينهما $144a'b'=576$ و منه $a'b'=4$ إذن الثنائيات $(a';b')$ هي $(1;4)$ و $(4;1)$ و منه الثنائيات $(a;b)$ هي $(12;48)$ و $(48;12)$.