وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الوادي — دورة ماي 2018

امتحان البكالوريا التجريبية التعليم الثانوي — ثانوية:(حنكة علي + شرفي إبراهيم + غربي بشير+ محمد العيد+هواري بومدين)

الشعبة:رياضيات و تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الاول: $U_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
$$U_{n+1}=\frac{3(n+1)U_n-(8n+12)}{n}$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $U_n \langle 0$.

ب) أثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة.

2) لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $V_n=\frac{4-U_n}{n}$.

أ) اثبت أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها 3، يطلب تعيين حدها الأول، ثم عبر عن V_n بدلالة n .

ب) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $U_n=4-2n\times 3^n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج) احسب بدلالة n : $P_n=(4-U_1)\times(4-U_2)\times\ldots\times(4-U_n)$

3) لتكن المتتالية العددية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $W_n=\ln(\frac{n}{4-U_n})$.

عبر عن W_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=W_1+W_2+\ldots+W_n$.

التمرين الثاني:

I. نضع من اجل كل عدد مركب z : $p(z)=z^3-(1-2\cos(\theta))z^2+(1-2\cos(\theta))z-1$ حيث θ عدد حقيقي

1) احسب $P(1)$ ثم عين العددين الحقيقين a و b بحيث: $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

2) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

II. المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لاحقتاهما على الترتيب $z_A = 1$, $z_B = -\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ و $z_C = -\cos(\theta) - i\sin(\theta)$ حيث $\theta \in]0;\pi[$

1) أكتب بدلالة θ الاعداد z_A , z_B و z_C على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

2) حدد طبيعة المثلث ABC ثم عين قيمة θ حتى يكون المثلث ABC قائما في A.

3) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: $\arg\left(\dfrac{\overline{z} - z_B}{(z - z_C)^2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

4) نفرض أن $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_B}{z_C}\right)^{7n}$ حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الثالث:

يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و3كريات سوداء وكريتان حمرواتان و نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق U_1 وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحبة بالعدد $2n-1$ ، حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1.

1) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي.

2) يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و3 كريات سوداء.

نسحب عشوائيا كرية من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرية من الكيس U_1

أ) أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء.

ب) أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 بيضاء.

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.54;0.55[$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x[(\ln x)^2 + 1]}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتجانس والمتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-2g(\ln x)}{x^2\left[(\ln x)^2+1\right]^2}$

ب) استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;e^{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e^{\alpha};+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to e^{\alpha}}\dfrac{f(x)-f(e^{\alpha})}{x-e^{\alpha}}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) ارسم (C_f). (نأخذ $f(e^{\alpha})\approx 0.69$).

5) نرمز بـ $A(\alpha)$ لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتيهما: $x=e^{\alpha}$ و $x=1$ (حيث $\alpha\in]0.54;0.55[$ يحقق $f(\alpha)=0$).

اثبت ان $A(\alpha)=\ln\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$. ثم عين حصرا لـ $A(\alpha)$

III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=-f(|x|)$.

(C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتجانس والمتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس شفعية الدالة h.
2) انشئ المنحنى (C_h) في المعلم السابق.

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد $(1+2017^{4n+1954}+2018^{4n+3}-2\times1439^{1962n})$ يقبل القسمة على 5 .

3) بين أن العدد 131 أولي.

4) أ) عين الاعداد الطبيعية n التي تحقق: $\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ ab=5m \end{cases}$ حيث $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حيث $7\langle n\langle 15$ ثم استنتج الثنائيات (a,b) .

التمرين الثاني:

1) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$.

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرف بـ: $z'=-iz_Bz$

عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة

2) نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n\in N}$ كما يلي: $A_0=A$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $A_{n+1}=S(A_n)$

(z_n لاحقة النقطة A_n)

أ) عين لاحقتي النقطتين A_1 و A_2

ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=2^ne^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$

3) نعتبر المعادلة $12x-5y=3....(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ حيث $y_0-x_0=5$, ثم حل المعادلة (E)

ب) استنتج مجموعة الاعداد الطبيعية n بحيث تكون النقط A_n تنتمي الى المحور الحقيقي الموجب تماما.

4) بين انه من اجل عدد طبيعي n العدد $\frac{z_{n+3}}{z_n}$ تخيلي صرف, ثم استنتج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3}.

5)عين بدلالة n قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}})$ ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقط O ، A_n و A_{2n} في استقامية.

التمرين الثالث:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستقيم (Δ) المار بالنقطة $A(-3;-1;-3)$ و $\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه له، والمستقيم (d) تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+2 \, , t \in \mathbb{R} \\ z = -2t+3 \end{cases}$

1) أ) تحقق أن النقطة $B(3;2;3)$ تنتمي للمستقيم (d).

ب) بين أن المستقيمين (Δ) و (d) متعامدين، و ليسا من نفس المستوي.

ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يحوي (Δ) ويوازي (d).

2) (S) سطح كرة مركزها $C(-1;0;-1)$ ونصف قطرها 6. و (P) مستو معادلته: $2x+y+2z+13=0$

أ) أثبت أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A، يطلب تعيين نصف قطرها.

ب) بين أن المستقيم (d) مماس لسطح الكرة في النقطة B.

3) λ وسيط حقيقي غير معدوم, G_λ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-2);(C,\lambda e)\}$ حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري

عين بدلالة λ (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $2\left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\lambda e\overrightarrow{CM}\right\| = \lambda e\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

التمرين الرابع:

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2e^x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) قارن بين x و $\frac{1}{x}$ في المجال $]0;1[$ ثم في المجال $]1;+\infty[$

3) استنتج أنه: إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتجانس والمتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \succ}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب) احسب $f'(1)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) اثبت ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0.56 \prec \alpha \prec 0.57$ و $1.56 \prec \beta \prec 1.57$

4) أرسم (C_f) في المجال $]0;2]$

5) لتكن الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$

(C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتجانس والمتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_h)

ب)عين الاعداد الحقيقية a , b و c حتى تكون الدالة $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$ اصلية للدالة $x \mapsto (x^2-2x+2)e^x$ على المجال $]0;+\infty[$

ج) من اجل كل عدد حقيقي λ اكبر تماما من 1, نضع $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(x^2-2x+2)e^x dx$

فسر هندسيا العدد $A(\lambda)$ ثم احسبه بدلالة λ

6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)-\left(m^2-2m+2\right)e^m-e^{\frac{1}{m}}+3e=0$

انتهى الموضوع الثاني بالتوفيق والنجاح لتلاميذنا الاعزاء