وزارة التربية الوطنية

ثانويات : سليماني جلول بتاشتة - تيبركانين بالعطاف - علي ماضي بالبرج - فايد السعيد بالمسيلة

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي **دورة : ماي 2018**

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة :03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

كيس يحتوي على كرتين بيضاء مرقمة بـ : 2 ,3 وثلاث كرات حمراء مرقمة بـ : 1 ,3 ,3 وأربع كرات سوداء مرقمة بـ : 2 ,2 , $3,3$

1) نسحب في آن واحد كرتين من الكيس .

a) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية:

A : ظهور كرتين من لونين مختلفين

B : ظهور رقمين فرديين على الأكثر

C : ظهور عددين مجموع رقميهما عدد أولي

b) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين الظاهرين .

- عين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي و الامل الرياضياتي ثم الانحراف المعياري.

2) نعتبر الكيس الأول و كيس آخر يحوي كرتين بيضاوين مرقمة بـ : 1 ,1 وكرتين حمراوين مرقمة بـ : 1 ,3 وكرتين سوداوين مرقمة بـ : 2 ,2

نرمي حجر نرد مرقم من 1 الى 6 مرة واحدة فعند ظهور عدد فردي نسحب كرة من الكيس الاول و عند ظهور عدد زوجي نسحب كرة من الكيس الثاني .

- بين أن احتمال ظهور كرة بيضاء هو : $p(B') = \frac{5}{18}$

- علما ان الكرة المسحوبة بيضاء ، ما هو احتمال أن تكون من الكيس الثاني ؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

1) ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$.

ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي :من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

ا) بين أن المتتالية (v_n) حسابيةأساسها $\frac{1}{3}$ و عين حدها الأول .

ب) جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2n+9}{n+3}$

ج) احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ و $S'_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_{n-1}v_{n-1}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

1) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) ا) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران R الذي مركزه المبدأ O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ب) عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) بين أن العدد $L = \left(\dfrac{z_B}{2}\right)^{1439} + \left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $arg(z - z_A L) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ مع : $k \in \mathbb{Z}$.

ا) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

ب) عين المجموعة (Γ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g(1)$, ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{\ln x}{2x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

حيث : $||\overrightarrow{i}|| = 2cm$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) ا) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب) عين الوضع النسبي للمستقيم (D) والمنحنى (C_f) .

4) ا) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (D) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) اكتب معادلة المماس (T) .

5) أنشئ في المعلم السابق (D) و (T) و (C_f) .

6) ا) بين أن الدالة $H : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ أصلية للدالة $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = e^2$.

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر (p) المستوي الذي معادلته $x+2y-z+2=0$ والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t\ ;\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=3-4t \end{cases}$

ونعتبر النقطتين $A(1;0;-1)$ و $B(3;2;1)$.

– عين في كل مايلي الإجابة الصحيحة مع التبرير :

1) المستقيم (Δ) والمستقيم (AB) :

$a)$ ليسا من مستو واحد $b)$ متوازيان $c)$ متقاطعان

2) المسافة بين النقطة A والمستوي (p) هي :

$a)$ $3\sqrt{6}$ $b)$ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ $c)$ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

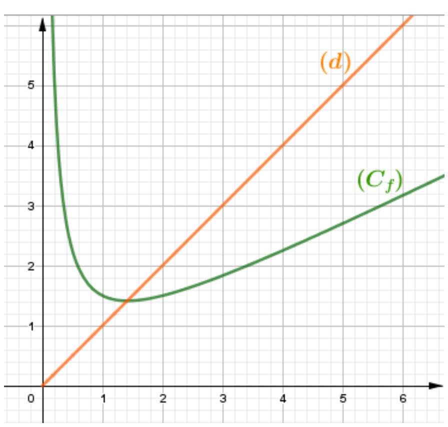
3) المستوي (p) و المستقيم (Δ):

$a)$ متوازيان $b)$ المستقيم محتوى في المستوي $c)$ يتقاطعان في نقطة

4) المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (p) هي :

$a)$ $H\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ $b)$ $H\left(-\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$ $c)$ $H\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$

التمرين الثاني: (05 نقاط)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}$ ، و ليكن (C_f) المنحني الممثل لها ، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

(أنظر الشكل المقابل)

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=2$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) برهن أنّه من أجل كل x من $[\sqrt{2};+\infty[$: $f(x)\leq x$

3) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{2}\leq u_{n+1}<u_n\leq 2$.

4) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟

5) لتكن l نهاية المتتالية (u_n)

– بيّن أن l هو حل للمعادلة $x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$, ثم عين قيمته .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} iz_2 + 2z_1 = 1 + 9i \\ 2z_2 + iz_1 = -2 + 8i \end{cases}$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 1 + 3i$ ، $z_B = 2 + 4i$ و $z_c = 1 + z_A$.
(γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}^+$.
ا) عين عمدة للعدد المركب $z_B - z_A$ وفسر النتيجة هندسيا .
ب) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (γ) ثم عين بدقة المجموعة (γ) .

3) نعتبر التحويل النقطي h الذي يحول النقطة M ذات الاحقة z الى النقطة M' ذات الاحقة z'
و المعرف بـ: $z' - z = 3(z_G - z)$
ا) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
ب) بين أن h تحاكي يطلب تعيين عبارته المركبة و عناصره المميزة .
ج) تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة H منتصف القطعة $[AB]$ بالتحاكي h .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + \dfrac{b}{1+e^x}$. حيث : a و b عددان حقيقيان .
–عين a و b حيث : $g(1) = \dfrac{e}{1+e}$ و $g'(0) = \dfrac{5}{4}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \dfrac{1}{1+e^x}$.
(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ حيث $||\vec{i}|| = 4cm$

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
3) ا) بين أن المستقيمين المعرفين بـ : $(\Delta) : y = x$ و $(\Delta') : y = x - 1$ ، مستقيمان مقاربان لـ (C_f) .
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيمين (Δ) و (Δ') .
4) تحقق أن $f(-x) + f(x) = -1$. فسر النتيجة بيانيا .
5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ماذا تستنتج ؟ .
6) ا) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث : $0 < \alpha < 0.5$.
ب) تحقق أن : $1 + e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$
7) أنشيء كلا من (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f) .
8) عين قيم الوسيط الحقيقيي m حتى يكون للمعادلة $m = \dfrac{1}{1+e^x}$ حلا وحيدا .

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

التصحيح النموذجي لامتحان البكالوريا التجريبي2018

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1/ حساب احتمالات الحوادث :

$$P(A)=\frac{C_2^1\times C_3^1+C_2^1\times C_4^1+C_4^1\times C_3^1}{36}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

$$P(B)=\frac{C_6^2+C_6^1\times C_3^1+C_3^2}{36}=\frac{36}{36}=1$$

$$P(C)=\frac{C_3^1\left(C_5^1+C_1^1\right)}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

b) قيم المتغير العشوائي هي : 3 ، 4 ، 5 ، 6

قانون الاحتمال :

$$P(X=3)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=4)=\frac{C_3^2+C_1^1\times C_5^1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=5)=\frac{C_5^1\times C_3^1}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=6)=\frac{C_5^2}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

الأمل الرياضياتي :

$$E(X)=3\times\frac{1}{12}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{5}{12}+6\times\frac{5}{18}=\frac{176}{36}=\frac{44}{9}$$

التباين :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{890}{36}-\frac{1936}{81}=\frac{133}{162}$$

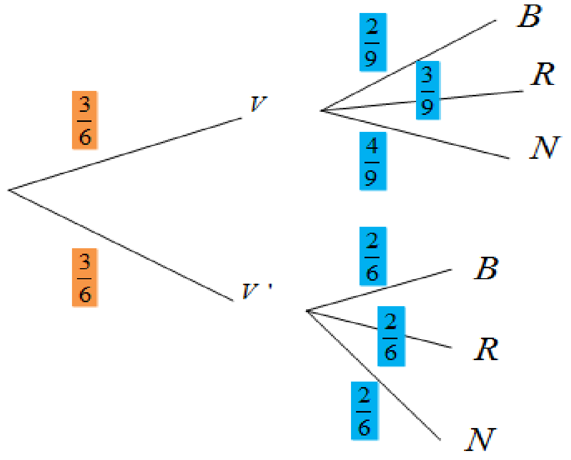
الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{133}{162}}$$

/2

V: ظهور رقم فردي و V': ظهور رقم زوجي

نشكل شجرة الاحتمالات :



لدينا: $P(B')=\frac{3}{6}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{15}{54}=\frac{5}{18}$

لدينا احتمال الحادثة الكرة المسحوبة بيضاء ومن الكيس الثاني

أي : $P(B\cap U_2)=\frac{1}{6}$

ومنه :

$$P_{B'}(U_2)=\frac{P(B\cap U_2)}{P(B')}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{5}$$

التمرين الثاني :

1/أ/ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n>2$.

نضع: $p(n): U_n>2$ من أجل $n=0$: $3>2$ محققة إذن الخاصية $p(0)$ صحيحة

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي أن $U_n>2$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة أي أن $U_{n+1}>2$.

باستعمال القسمة الاقليدية نجد : $U_{n+1}=5-\frac{9}{U_n+1}$

لدينا من فرضية التراجع : $U_n>2$

ومنه : $U_n+1>3$

ومنه : $\frac{1}{U_n+1}<\frac{1}{3}$ **ومنه :** $\frac{-9}{U_n+1}>-3$

ومنه : $5-\frac{9}{U_n+1}>2$

إذن : $U_{n+1}>2$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n>2$

ب/تبيان أن (U_n) متناقصة :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{5U_n-4}{U_n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+4U_n-4}{U_n+1}=\frac{-(U_n-2)^2}{U_n+1}$$

بما أن : $U_{n+1}-U_n<0$ فإن : (U_n) متناقصة تماما

- (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة .

2/أ/ تبيان أن (V_n) حسابية :

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{U_{n+1}-2}-\frac{1}{U_n-2}=\frac{1}{\frac{5U_n-4}{U_n+1}-2}-\frac{1}{U_n-2}$$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{\frac{3U_n-6}{U_n+1}}-\frac{1}{U_n-2}=\frac{U_n+1}{3U_n-6}-\frac{1}{U_n-2}$$

وعليه : $$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{U_n+1}{U_n-2}-\frac{3}{U_n-2}\right)=\frac{1}{3}$$

إذن: (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الاول

$$V_0=\frac{1}{U_0-2}=1$$

ب/كتابة V_n بدلالة n : $$V_n=1+\frac{n}{3}=\frac{n+3}{3}$$

استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

لدينا : $V_n=\frac{1}{U_n-2}$ أي ان $V_n(U_n-2)=1$ تكافئ :

$V_nU_n=1+2V_n$ يكافئ : $U_n=\frac{1+2V_n}{V_n}$ يكافئ :

$$U_n=\frac{1+2\left(\frac{n+3}{3}\right)}{\frac{n+3}{3}}=\frac{2n+9}{n+3}.$$

ج/حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+9}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2$$

/3

$$S_n=\frac{n}{2}\left(1+\frac{n+2}{3}\right)=\frac{n(n+5)}{6}$$

$$S'_n=\frac{1+2V_0}{V_0}\times V_0+\frac{1+2V_1}{V_1}\times V_1+....+\frac{1+2V_{n-1}}{V_{n-1}}\times V_{n-1}$$

$$S'_n=1+2V_0+1+2V_1+....+1+2V_{n-1}=n+2S_n$$

إذن :

$$S'_n=n+\frac{n(n+5)}{3}$$

التمرين الثالث :

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 : حيث:

1) كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الاسي

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ أي $AC=AB$

ولدينا : $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}$ أي $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$

إذن: المثلث ABC متقايس الاضالاع

2/أ/

لدينا : $R(B)=D$ معناه $z_D-z_O=e^{\frac{2\pi}{3}i}(z_B-z_O)$

وعليه $$z_D=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_B=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)=-2$$

ب/طبيعة الرباعي $ABDC$

لدينا : $BD=|z_D-z_B|=2\sqrt{3}$

$CD=|z_D-z_C|=2\sqrt{3}$

إذن: $AB=AC=CD=BD$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$

وبالتالي $ABDC$ معين

/3

لدينا : $$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439}=\cos\left(1439\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(1439\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(480\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(480\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

وعليه

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ولدينا :

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2018}=\cos\left(-2018\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-2018\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(673\pi-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(673\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

وعليه

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2018}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي $$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2018}=-i\sqrt{3}$$

4/أ/

لدينا

$$\arg\left(z_A-z_AL\right)=\arg\left(4+4i\sqrt{3}\right)=\arg\left(4z_B\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

إذن $A\in(\Gamma)$

تعيي المجموعة (γ) :

نضع $z_E = z_A L = -4\sqrt{3}i$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{EM}\right)=\frac{\pi}{3}$ k $\arg(\quad - \quad_E)=\frac{\pi}{3}+2\,z\pi$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم $[EA)$ ماعدا النقطة E

التمرين الرابع :

/I

1/دراسة إتجاه تغير الدالة g :

g معرفة وقابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$g'(x)=-2x-\frac{1}{x}=-\left(2x+\frac{1}{x}\right)$ **إذن** من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$ **وعليه** g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

2/لدينا $g(1)=-1^2+1-\ln 1=0$

اذن:

$g(x)\prec 0$ **على المجال** $]1;+\infty[$

$g(x)\geq 0$ **على المجال** $]0;1]$

/II

1/أ)حساب: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$

التفسير الهندسي : حامل محور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

أ)حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

2/أ)

f معرفة وقابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}(2x)-2\ln x}{(2x)^2}=\frac{-x^2+1-\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$$

ب)دراسة إتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

إذن من أجل كل x من $]0;1[$: $f'(x)\succ 0$ **وعليه** f متزايدة تماما على $]0;1[$

ومن أجل كل x من $[1;+\infty[$: $f'(x)\leq 0$ **وعليه** f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{5}{2}$	↘ $-\infty$

3/أ) تبيان أن المستقيم (D) المعرف بـ $y=-\frac{1}{2}x+3$ مقارب لـ (C_f) :

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+3$ مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$

ب/دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) :

لدينا: $f(x)+\frac{1}{2}x-3=\frac{\ln x}{2x}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من

المجال $]0;1[$ فإن : $f(x)-x\prec 0$ لان من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$ لدينا $\ln x\prec 0$

ومنه المنحني (C_f) يقع أسفل المستقيم (D) على المجال $]0;1[$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن : $f(x)-x\geq 0$

لان من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ لدينا $\ln x\geq 0$

ومنه المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $[1;+\infty[$

4/أ) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا يوازي (D) :

أي : $f'(x)=-\frac{1}{2}$ **معناه** $\frac{-x^2+1-\ln x}{2x^2}=-\frac{1}{2}$

إذن $x=e$

وبالتالي (C_f) يقبل مماسا يوازي (D)

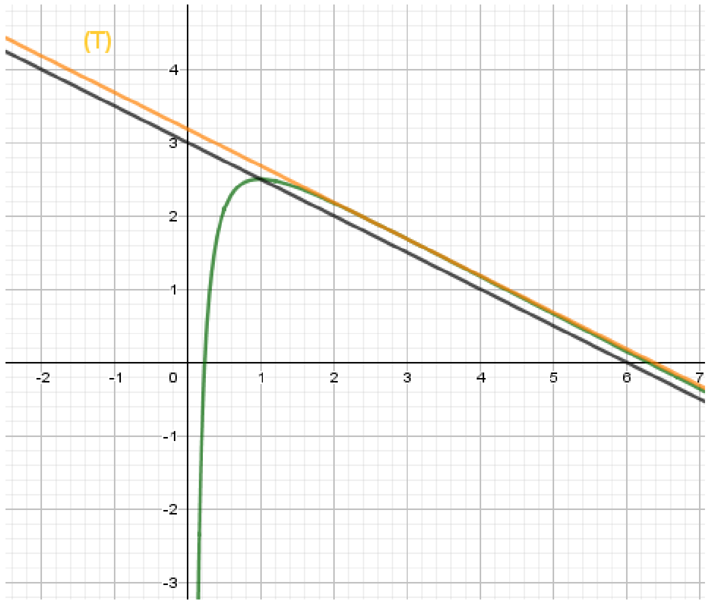
عند $A\left(e;\frac{-e^2+6e+1}{2e}\right)$

ب/كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة e :

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ حيث $f'(e)=-\frac{1}{2}$

ومنه $\boxed{(T): y=-\frac{1}{2}x+\frac{6e+1}{2e}}$

5/انشاء كل من (T),(D) و (C_f) :



6/أ/

لدينا :

الدالة $x \mapsto \ln x$ **قابلة للاشتقاق على المجال** $]0;+\infty[$

إذن الدالة H **قابلة للاشتقاق على المجال** $]0;+\infty[$

ولدينا :

$$H'(x)=\frac{2\times\frac{1}{x}\ln x}{2}=\frac{\ln x}{x}=h(x)$$

ب/حساب مساحة الحيز :

لدينا المنحني (C_f) **يقع فوق المستقيم** (D)

على المجال $[1;e^2]$

وبالتالي : $\int_1^{e^2}(f(x)-y)dx=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{2x}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{e^2}=1$

إذن : مساحة الحيز هي : $1\times 4=4cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

تعيين الاجابة الصحيحة مع التبرير :

1/ المستقيم (Δ) والمستقيم (AB) : **الإجابة [a]**

ليكن $\vec{u}$ و$\vec{v}$ شعاعي توجيه (Δ) و(AB) على التوالي حيث

$\vec{u}(2;-1;-4)$, $\vec{v}(2;2;2)$ **بما أن** $\vec{u}$ و$\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا **فان** (Δ) و(AB) غير متوازيين .

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(AB)$ **معناه :**

$$\begin{cases} -1+2t=1+2s .....(1) \\ 2-t=2s .....(2) \\ 3-4t=-1+2s .....(3) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد $\boxed{t=\frac{4}{3}}$ **ومنه**

$\boxed{s=\frac{1}{3}}$ نعوض قيمة t وs في المعادلة (3) نجد $\frac{-1}{3}=\frac{-7}{3}$ مستحيلة

اذن المستقيمين (Δ) و(AB) ليسا من مستو واحد.

2/ المسافة بين النقطة $A(1;0;-1)$ والمستوي (p) **الإجابة [b]**

$$d(A;(p))=\frac{|1+2(0)-(-1)+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt6}=\frac{4\sqrt6}{6}=\frac{2\sqrt6}{3}$$

3/ المستوي (p) والمستقيم (Δ) يتقاطعان في نقطة: **الإجابة [c]**

لدينا $\vec{u}(2;-1;-4)$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و $\vec{n}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (p)

بما أن $2(1)+(-1)(2)+(-4)(-1)=4\neq 0$ **فإن** (Δ) يقطع المستوي (p) في نقطة .

4/ المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (p) : **الإجابة [c]**

لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (p).

نعين التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل النقطة B وشعاع توجيهه هو الشعاع الناظمي للمستوي (p) ,$t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=2+2t \\ z=1-t \end{cases}$$

النقطة H تنتمي لهذا المستقيم معناه يوجدعدد حقيقي t بحيث:

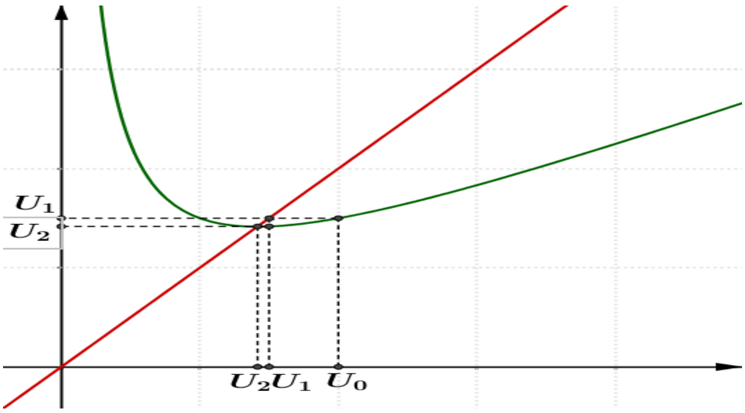
$$\begin{cases} x_H=3+t \\ y_H=2+2t \\ z_H=1-t \end{cases}$$

وكون أن $H\in(p)$ **إذن** :

$3+t+2(2+2t)-(1-t)+2=0$ أي $t=\frac{-4}{3}$ بعد التعويض قيمة t نجد $\boxed{H\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{3};\frac{7}{3}\right)}$

التمرين الثاني :

1/أ/ تمثيل الحدود $U_0;U_1;U_2;U_3$ 1 على محور الفواصل :



ب/تخمين حول اتجاه تغير (U_n) وتقاربها :

(U_n) متناقصة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و(Δ)

2/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل x من $[\sqrt2,+\infty[$: $f(x)\le x$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[\sqrt2,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=f(x)-x=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$$

g معرفة وقابلة الاشتقاق على $[\sqrt2,+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$g'(x)=\frac{-1}{2}-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن من أجل كل x من $[\sqrt2,+\infty[$: $g'(x)\prec 0$ **وعليه** g متناقصة تماما على المجال $[\sqrt2,+\infty[$

وبما أن $g(\sqrt2)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ **فإنه** من أجل كل x من $[\sqrt2,+\infty[$: $g(x)\le 0$ أي $f(x)-x\le 0$ أي $f(x)\le x$

3/برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$.

نضع : $p(n):\ \sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$ من أجل $n=0$: $\sqrt2\le\frac{3}{2}\le 2$

محققة إذن الخاصية $p(0)$ صحيحة

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي أن $\sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة أي أن $\sqrt2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$.

لدينا من فرضية التراجع : $\sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$ وكون الدالة f متزايدة تماماعلى المجال $[\sqrt2,+\infty[$ **إذن** $f(\sqrt2)\le f(U_{n+1})\le f(U_n)$ أي $\sqrt2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$

4/دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n)

لدينا من السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt2\le U_{n+1}\le U_n$

إذن:من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}\le U_n$ **و عليه** المتتالية (U_n) متناقصة وبما انها محدودة من الأسفل بـ $\sqrt2$ فهي متقاربة

5/تبيان ان l هو حل للمعادلة $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ وتعيين قيمة l

بما أن $\sqrt{2}\le U_{n+1}\le U_n$ متقاربة **إذن** :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=l$ أي $f(l)=l$ **أي** $\frac{l}{2}+\frac{1}{l}=l$ أي

$\frac{1}{2}\left(l+\frac{2}{l}\right)=l$

تعيين قيمة l : $\frac{1}{2}\left(l+\frac{2}{l}\right)=l$ **تكافئ** $\frac{l}{2}-\frac{2}{l}=0$ أي $\frac{l^2-2}{2l}=0$

أي l^2-2 **أي** $\boxed{l=\sqrt{2}}$ وضح $=-\sqrt{2}$ ن

التمرين الثالث :

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 : حيث:

$$\begin{cases} iz_2+2z_1=1+9i \; ...(1) \\ 2z_2+iz_1=-2+8i \; ...(2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في العدد المركب $2i$ نجد:

$$\begin{cases} iz_2+2z_1=1+9i \; ...(1) \\ 4iz_2-2z_1=-4i-16 ...(2) \end{cases}$$ بالجمع (2) مع (1) نجد

$\boxed{z_2=1+3i}$ بالتعويض في (2) نجد $\boxed{z_1=2+4i}$

2/أ/ تعيين عمدة العدد المركب z_B-z_A :

لدينا $z_B-z_A=2+4i--1-3i=1+i$

ومنه $\boxed{\arg(z_B-z_A)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}}$

تفسير النتيجة هندسياً $\arg(z_B-z_A)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ **معناه**

$\boxed{\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{4}}$

ب/تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (γ) :

بما أن $z_B-z_A=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **أي** $z_B=z_A+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **إذن**

$\boxed{B\in(\gamma)}$

تعيين المجموعة (γ) :

$k\in\mathbb{R}^+$ $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ **تعني** $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}}$ **اي**

أي $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{4}$ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{4}$

ومنه مجموعة النقط (γ) هي نصف المستقيم $[AB)$ ماعدا النقطة A

3/أ/تعيين z_G

G هي مركز ثقل ABC

أي هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$**ومنه**

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ **أي** $z_G=\frac{1+3i+2+4i+2+3i}{3}$ **ومنه**

$\boxed{z_G=\frac{5}{3}+\frac{10}{3}i}$

ب/تبيان أن h تحاكي يطلب تعيين عبارته المركبة وعناصره المميزة :

لدينا $z'-z=3(z_G-z)$ **ومنه** $z'=3z_G-3z+z$ **ومنه**

$z'=-2z+3z_G=-2z+5+10i$ **ومنه** h تحاكي عبارته المركبة

$\boxed{z'=-2z+5+10i}$ نسبته $k=-2$ ومركزه Ω ذات اللاحقة

$z_\Omega=\frac{5+10i}{1+2}$ **أي** $\boxed{z_\Omega=\frac{5}{3}+\frac{10}{3}i}$

ج/تحقق أن النقطة C هي صورة H منتصف القطعة $[AB]$ بالتحاكي h:

H منتصف القطعة $[AB]$ **معناه** $z_H=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$

أي $\boxed{z_H=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i}$

صورة النقطة H بالتحاكي h هي :

أي $z_{H'}=-2z_H+5+10i=-2\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i\right)+5+10i$

$z_{H'}=-3-7i+5+10i=2+3i$ **أي** $\boxed{z_{H'}=z_C}$

التمرين الرابع :

I/تعيين a و b:

لدينا $g(1)=\frac{e}{1+e}$ **معناه** $a+\frac{b}{1+e}=\frac{e}{1+e}$ **أي**

$\boxed{a(1+e)+b=e}$......(1)

ولدينا $g'(0)=\frac{5}{4}$ **معناه** $\boxed{a-\frac{b}{4}=\frac{5}{4}}$......(2) **لان**

$\left(g'(x)=a-\frac{be^x}{(1+e^x)^2}\right)$ **إذن** من (1) و (2) نجد

$\boxed{a=1b=-1}$

II/1/حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

2/دراسة إتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$f'(x)=1+\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **إذن** من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)\succ 0$

وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3/أ/تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بـ $y=x$ و $y=x-1$ مستقيمان مقاربان لـ (C_f)

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1}{1+e^x}-x=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{1+e^x}=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

ولدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{1}{1+e^x}-x+1=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{1+e^x}+1=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $-\infty$

ب/دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ'):

لدينا: $f(x)-x=-\frac{1}{1+e^x}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-x\prec 0$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x: $1+e^x\succ 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ)

ولدينا $f(x)-(x-1)=x-\frac{1}{1+e^x}-x+1=\frac{e^x}{1+e^x}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-(x-1)\succ 0$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\frac{e^x}{1+e^x}\succ 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ')

4/تحقق أن $f(-x)+f(x)=-1$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{1+e^{-x}}+x-\frac{1}{1+e^x}$$

$$=-\frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}-\frac{1}{e^x+1}$$

$$=\frac{-e^x-1}{1+e^x}=\frac{-\cancel{(1+e^x)}}{\cancel{1+e^x}}=-1$$

تفسير النتيجة بيانيا : $A\left(0;\frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحنى (C_f)

5/كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث $f'(0)=\frac{5}{4}$ و $f(0)=\frac{-1}{2}$ **ومنه**

$$\boxed{(T): y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}}$$

الاستنتاج: النقطة $A\left(0;\frac{-1}{2}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f)

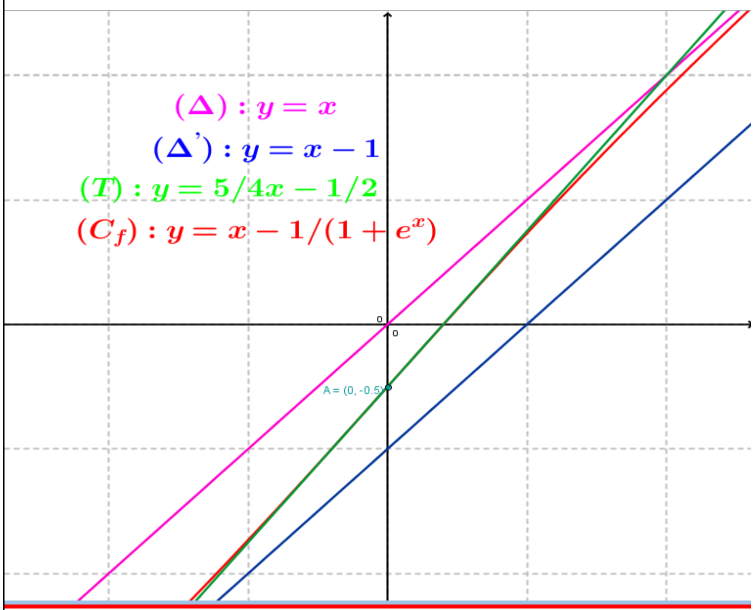
6/أ/تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α

حيث : $\alpha\in]0;0.5[$ واضح:نطبق شروط مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة

ب/تحقق أن $1+e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$:

لدينا $f(\alpha)=0$ **معناه** $\alpha-\frac{1}{1+e^\alpha}=0$ **أي** $\alpha=\frac{1}{1+e^\alpha}$ أي بالقلب $(\alpha\neq 0)$ نجد $\boxed{\frac{1}{\alpha}=1+e^\alpha}$

7/انشاء كل من $(T),(\Delta'),(\Delta)$ و (C_f) :



8/تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $m=\frac{1}{1+e^x}$ حلا وحيداً :

المعادلة $m=\frac{1}{1+e^x}$ **تكافئ** اي $-m=-\frac{1}{1+e^x}$ أي $x-m=x-\frac{1}{1+e^x}$ أي

$$\boxed{f(x)=x-m}$$

إذن من البيان نجد أن المعادلة $m=\frac{1}{1+e^x}$ تقبل حلاً وحيداً إذا كان $\boxed{m\in]0;1[}$