ثانوية: بلونار محمد / بسكرة　　　　السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: ثالثة ثانوي　　　　الشعبة: تقني رياضي

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات　　　　المدة: 03 ساعات

التمرين الاول : (07 ن)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$

(C_f): التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أ) اثبت أن المستقيمين (Δ) ، (Δ') اللذين معادلتيهما $y = x + \ln 4$ ، $y = x + 2 + \ln 4$ على الترتيب ،مستقيمين مقاربين مائلين
   لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، $-\infty$ على الترتيب
   ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ')
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
4. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.4 < \alpha < -3.3$
5. بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان : $f(-x) + f(x) = 2 + 2\ln 4$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
6. أنشئ (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ') في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

التمرين الثاني : (04 ن)

n عدد طبيعي اكبر او يساوي 2 ، كيس يحتوي على n كرية بيضاء و كريتين سوداوين ،الكريات كلها متماثلة.
نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في ان واحد.

1. حدد عدد الإمكانيات الكلية لهذه التجربة العشوائية
2. نعتبر الحدثين التاليين: A : "سحب كريتين بيضوين" ، B : "سحب كريتين مختلفتين في اللون"
   أ) بين أن: $P(B) = \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)}$
   ب) احسب $P(A)$
3. نضع $n = 3$
   X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة
   أ) حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X
   ب) اوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X
   ج) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ ، و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (04 ن)

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(\bar{z} + 2i)(z^2 - 2i) = 0$

II. المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + i$ ، $z_B = -z_A$ ، $z_C = 2i$.

1. احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، و حدد عمدة له.

2. استنتج طبيعة المثلث ABC

3. (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z والتي تحقق : $(z - z_A)\left(\overline{z - z_A}\right) = 2$

أ) تحقق ان النقطة C تنتمي الى المجموعة (E)

ب) عين ثم انشئ المجموعة (E)

التمرين الرابع : (05 ن)

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = 2^n - 1$

2. (v_n) و (w_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

أ) بين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

ب) اكتب بدلالة n ، S_n ، S'_n ، S''_n

حيث : $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $S''_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

II. نعتبر في هذا الجزء انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

1. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و v_n

2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $v_n \equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n ،بحيث $PGCD(u_n, v_n) = 3$

د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $S''_n \equiv S'_n[3]$

بالتـــوفيــــق

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات **المستوى: الثالثة ثانوي** **الشعبة : تقني رياضي**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزاة	العلامة المجموع
الدوال العددية	**التمرين الاول(07ن):**		**07**

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:...

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. ....

ا) اثبات أن المستقيمين (Δ) ،(Δ') اللذين معادلتهما $y = x + \ln 4$ ، $y = x + 2 + \ln 4$ على الترتيب ،مستقيمين مقاربين مائلين لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، $-\infty$ على الترتيب:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x+\ln 4)\right] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (x+2+\ln 4\right] = 0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ'):

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-(x+\ln 4)$	$+$
الوضع النسبي بين (C_f) ، (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-(x+2+\ln 4)$	$-$
الوضع النسبي بين (C_f) ، (Δ')	(C_f) يقع تحت (Δ')

3. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ،مع تشكيل جدول تغيراتها:...

- الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right)' = 1 - \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

- دراسة اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4. تبيين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.4 < \alpha < -3.3$:..

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ و $f(-3.4)\times f(-3.3) < 0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.4 < \alpha < -3.3$

5. تبيين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان : $f(-x) + f(x) = 2 + 2\ln 4$ ، مع التفسير الهندسي للنتيجة:......

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}+x+\ln 4+\frac{2}{e^{x}+1}$$

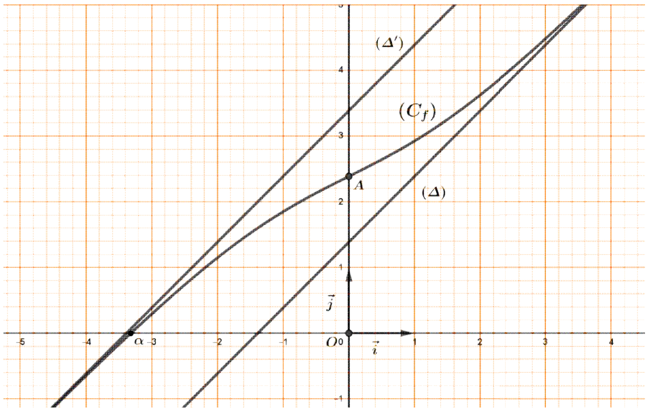
$$=2\ln 4+\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$=2\ln 4+\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}$$

$$=2\ln 4+2$$

التفسير الهندسي للنتيجة : النقطة $A(0;1+\ln 4)$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

6. أنشئ (C_f) و المستقيمين (Δ) ، (Δ') في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$:.................................



الاحتمالات و الاحصاء			04

التمرين الثاني(04ن):...

1. عدد الامكانيات الكلية للتجربة العشوائية:...

$$C_{n+2}^{2}=\frac{(n+2)!}{2!\times n!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

2. ....

أ) تبيين ان $P(B)=\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$:...

$$P(B)=\frac{C_n^1C_2^1}{C_{n+2}^2}=\frac{2n}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}=\frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

ب) حساب $P(A)$:...

$$P(A)=\frac{C_n^2}{C_{n+2}^2}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}=\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$$

3. ....

أ)

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :...

$$X\in\{\ 0\ ;1\ ;2\ \}$$

تحديد قانون احتمال للمتغير العشوائي X :..

$$P(X=0)=\frac{3}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$$

$x_i\ ,1\le i\le 3$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

ب) حساب $E(X)$ ، $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X : ....

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP(X=x_i)=(0)\left(\frac{3}{10}\right)+(1)\left(\frac{3}{5}\right)+(2)\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2P(X=x_i)-(E(X))^2$$

$$=(0)^2\left(\frac{3}{10}\right)+(1)^2\left(\frac{3}{5}\right)+(2)^2\left(\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

الأعداد المركبة	**التمرين الثالث (04ن):**		04

التمرين الثالث (04ن):

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(\overline{z}+2i)(z^2-2i)=0$ ....

$$S=\{2i;1+i;-1-i\}$$

II. ....

1. حساب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، وتحديد عمدة له:

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\frac{1}{2}i$ ومنه: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{1}{2}$ ،

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

2. استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $AB=2AC$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

اذن:المثلث ABC قائم في A

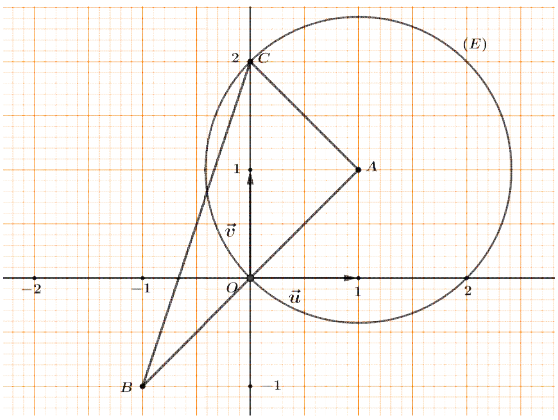
3. ....

أ) تبين ان النقطة C من المجموعة (E):

لدينا : $(z_C-z_A)(\overline{z_C-z_A})=|z_C-z_A|^2=(\sqrt{2})^2=2$

ومنه النقطة C من المجموعة (E)

ب) تعيين ثم انشاء المجموعة (E) في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$:



لدينا من اجل كل z من $\mathbb{C}$:

$$(z-z_A)(\overline{z-z_A})=|z-z_A|^2$$

ومنه : $|z-z_A|^2=2$

معناه أن : $|z-z_A|=\sqrt{2}$

معناه أن : $AM=\sqrt{2}$

إذن مجموعة النقط (E) عبارة عن دائرة

مركزها A ونصف قطرها $R=\sqrt{2}\ u.m$

المتتاليات العددية + الحساب و الاعداد

التمرين الرابع(05ن):

I.

1. برهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = 2^n - 1$:

نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$

المرحلة الأولى : من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ الخاصية $P(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية :ليكن k عدد طبيعي حيث $0 \le k \le n$

نفرض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k = 2^k - 1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$

لدينا : $u_{k+1} = 2u_k + 1$ ومنه: $u_{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 1$ ومنه : $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n = 2^n - 1$

2.

أ) تبيين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q :

لدينا : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

ب) كتابة بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n :

$S_n = 2^{n+1} - 1$ ، $S'_n = 2^{n+1} - (n+1)$ ، $S''_n = 2^{n+1} + 2(n+1)$

II.

1. تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و v_n :

ليكن $p\gcd(u_n ; v_n) = d$ ومنه : d / u_n و d / v_n إذن : $d / v_n - u_n$ أي : $d / 3$

وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d \in D_3 = \{1 ; 3\}$

2.

أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3:

n	$2k$	$2k+1$
بواقي 2^n على 3	1	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$:

لدينا : $v_n \equiv 0[3]$ معناه أن : $2^n \equiv -2[3]$ وبما أن: $-2 \equiv 1[3]$ إذن : $2^n \equiv 1[3]$

وبالتالي نجد : $n = 2k ; \quad k \in \mathbb{N}$

ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$:

نعلم أن $v_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k ; \quad k \in \mathbb{N}$ وكذلك نجد أن : $u_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k' ; \quad k' \in \mathbb{N}$

أي في هذه الحالة نجد : $p\gcd(u_n ; v_n) = 3$ لكن القيم الممكنة لـ d هي : $3 ; 1$ إذن حتى يكون $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$ يجب أن يكون $n = 2q + 1 ; \quad q \in \mathbb{N}$

3. تبيين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $S''_n \equiv S'[3]$:

لدينا : $S''_n - S' = 3(n+1)$ تكافؤ أن : $S''_n - S'_n = 3k$ تكافؤ أن : $S''_n - S'_n = 0[3]$

تكافؤ أن : $S''_n = S'_n[3]$

05